

# Les naturels de 3 chiffres aboutissent à 495

olivier\_pirson\_opi@yahoo.fr  
<http://www.opimedia.be/>

lundi 2 janvier 2012

## Résumé

Petit processus itératif jouant sur les chiffres des naturels écrits en base 10. Suivi d'un autre processus aboutissant à des palindromes.

## 1 Définition du processus

Prenons un naturel de 3 chiffres (en base 10), par exemple 123.

On lui applique le processus suivant :

permuter les chiffres pour écrire le plus grand nombre possible : 321  
permuter les chiffres pour écrire le plus petit nombre possible : 123  

---

effectuer la soustraction : 198

On recommence le même processus avec 198 :  $981 - 189 = 792$ . Et ainsi de suite...

On obtient le parcours suivant :  $123 \mapsto 198 \mapsto 792 \mapsto 693 \mapsto 594 \mapsto 495 \leftarrow$

On constate (en essayant) que les naturels de 3 chiffres (non tous identiques) aboutissent au point fixe 495.

## 2 Sur 1 chiffres : de 0 à 9

Sur 1 chiffre le comportement du processus est trivial, le résultat est immédiatement 0.

## 3 Sur 2 chiffres : de 00 à 99

Voyons ce que le même processus donne avec 2 chiffres.

Soit  $\overline{ba}^{10} = 10b + a$  avec  $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Si  $a = b$  alors  $\overline{ba}^{10} \mapsto 0 \leftarrow$

Remarquons que les deux naturels  $\overline{ba}^{10}$  et  $\overline{ab}^{10}$  aboutissent directement au même résultat. Nous pouvons donc nous restreindre à ne considérer que les cas tels que  $a < b$ .

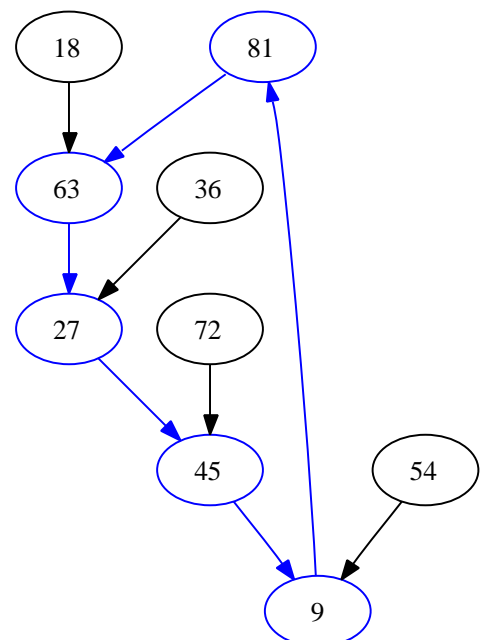
Ce qui donne :

$$\overline{ba}^{10} = 10b + a$$

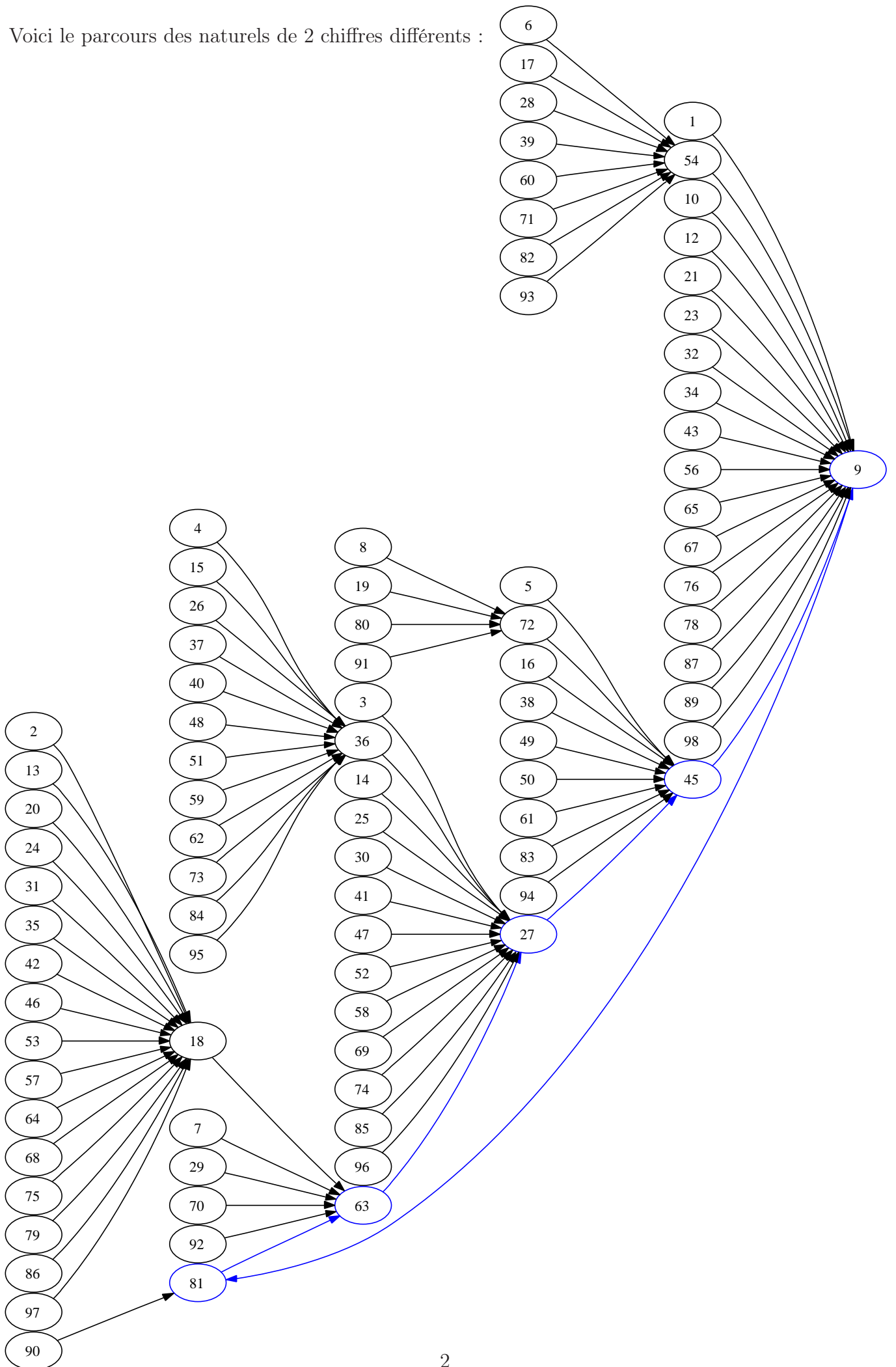
$$\overline{ab}^{10} = 10a + b$$

$$\overline{10(b-a) + a - b} = 9(b-a)$$

Nous sommes donc ramené aux multiples non nuls de 9 ( $\leq 81 = 9 \cdot 9$ ), dont le parcours est représenté ci-contre :



Voici le parcours des naturels de 2 chiffres différents :



## 4 Sur 3 chiffres : de 000 à 999

Revenons sur 3 chiffres.

Soit  $\overline{cba}^{10} = 100c + 10b + a$  avec  $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Si  $a = b = c$  alors  $\overline{cba}^{10} \mapsto 0 \leftrightarrow$

Remarquons encore que si nous permutons les chiffres  $a$ ,  $b$  et  $c$ , les naturels obtenus aboutissent directement au même résultat. Nous pouvons donc nous restreindre à ne considérer que les cas tels que  $a \leq b \leq c$ , non tous égaux.

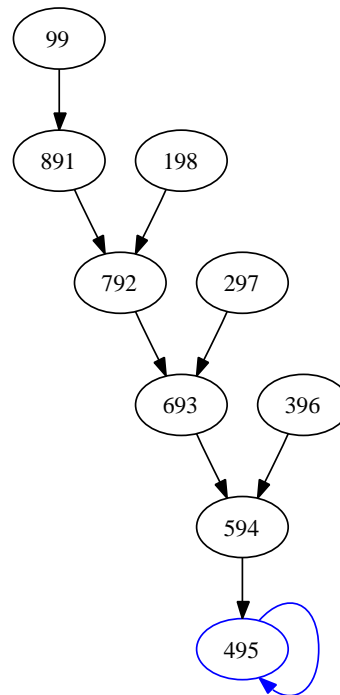
Ce qui donne :

$$\overline{cba}^{10} = 100c + 10b + a$$

$$\overline{abc}^{10} = 100a + 10b + c$$

$$\hline 100(c - a) + a - c = 99(c - a)$$

Nous sommes donc ramené aux multiples non nuls de 99 ( $\leq 891 = 99 \cdot 9$ ), dont voici le parcours :

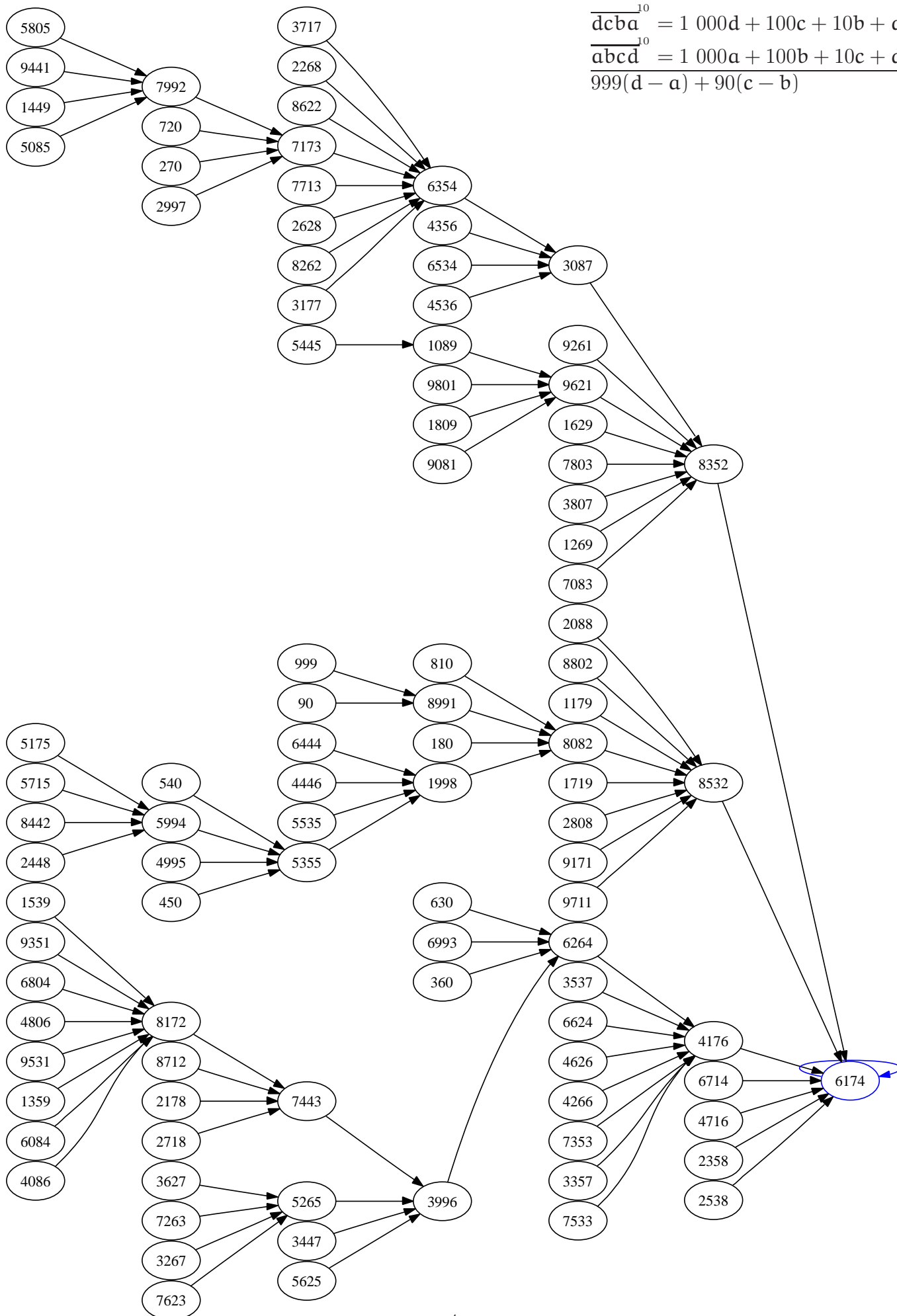


# 5 Sur 4 chiffres : de 0 000 à 9 999

$$\overline{dcba}^{10} = 1\,000d + 100c + 10b + a$$

$$\overline{abcd}^{10} = 1\,000a + 100b + 10c + d$$

$$\frac{999(d - a) + 90(c - b)}{10}$$

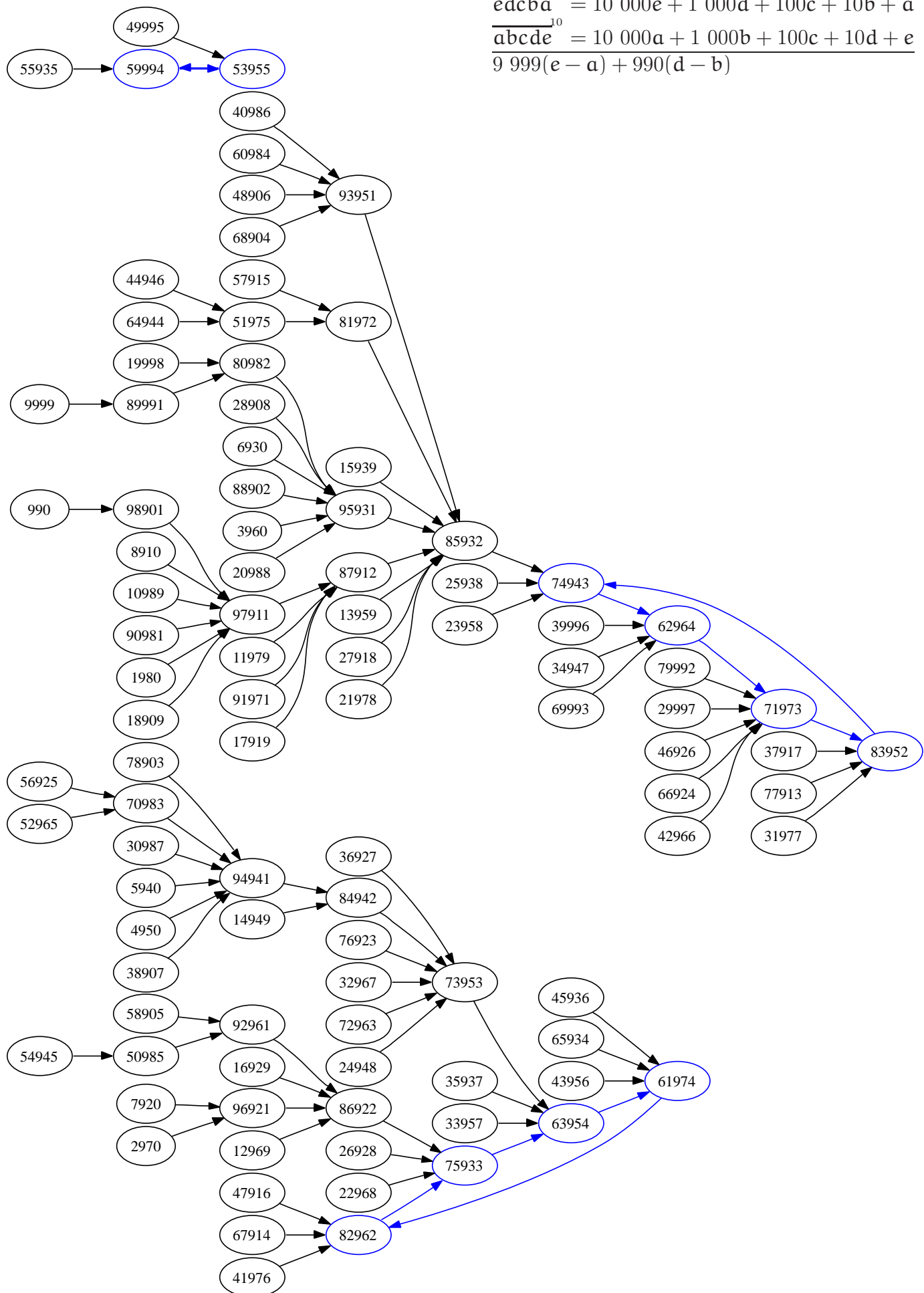


# 6 Sur 5 chiffres : de 00 000 à 99 999

$$\overline{edcba}^{10} = 10\,000e + 1\,000d + 100c + 10b + a$$

$$\overline{abcde}^{10} = 10\,000a + 1\,000b + 100c + 10d + e$$

$$\hline 9\,999(e - a) + 990(d - b)$$



## 7 Un autre processus, irrésolu

Maintenant, additionnons plutôt un naturel avec lui-même écrit dans l'autre sens (en base 10).

Par exemple pour 789 :

$$\begin{array}{r} 789 \\ 987 \\ \hline 1\ 776 \end{array}$$

Et on recommence ce nouveau processus avec le naturel obtenu, jusqu'à aboutir à un palindrome. Cela donne le parcours :  $789 \mapsto 1\ 776 \mapsto 8\ 547 \mapsto 16\ 005 \mapsto 66\ 066$

(Cf. *Déconcertantes conjectures*. Jean-Paul DELAHAYE, rubrique *Logique et calcul* p.92 in *Pour la Science* n°367, mai 2008)

Le cas de 89 est assez long :

$89 \mapsto 187 \mapsto 968 \mapsto 1\ 837 \mapsto 9\ 218 \mapsto 17\ 347 \mapsto 91\ 718 \mapsto 173\ 437 \mapsto 907\ 808$   
 $\mapsto 1\ 716\ 517 \mapsto 8\ 872\ 688 \mapsto 17\ 735\ 476 \mapsto 85\ 189\ 247 \mapsto 159\ 487\ 405 \mapsto 664\ 272\ 356$   
 $\mapsto 1\ 317\ 544\ 822 \mapsto 3\ 602\ 001\ 953 \mapsto 7\ 193\ 004\ 016 \mapsto 13\ 297\ 007\ 933 \mapsto 47\ 267\ 087\ 164$   
 $\mapsto 93\ 445\ 163\ 438 \mapsto 176\ 881\ 317\ 877 \mapsto 955\ 594\ 506\ 548 \mapsto 1\ 801\ 200\ 002\ 107$   
 $\mapsto 8\ 813\ 200\ 023\ 188$

### Conjecture du palindrome inévitable :

Tout naturel finit par aboutir à un palindrome ?

(En base  $2^i$  ( $i \in \mathbb{N}_*$ ), 11, 17, 20 et 26, les équivalents de cette conjecture ont été prouvées fausses.)

Mais le cas de 196 lui ...

$196 \mapsto 887 \mapsto 1\ 675 \mapsto 7\ 436 \mapsto 13\ 783 \mapsto 52\ 514 \mapsto 94\ 039 \mapsto 187\ 088 \mapsto 1\ 067\ 869$   
 $\mapsto 10\ 755\ 470 \mapsto 18\ 211\ 171 \mapsto 35\ 322\ 452 \mapsto 60\ 744\ 805 \mapsto 111\ 589\ 511 \mapsto 227\ 574\ 622$   
 $\mapsto 454\ 050\ 344 \mapsto 897\ 100\ 798 \mapsto 1\ 794\ 102\ 596 \mapsto 8\ 746\ 117\ 567 \mapsto 16\ 403\ 234\ 045$   
 $\mapsto \dots$

Eh bien peut-être, mais on ne sait pas ! Les calculs ont été poussés jusqu'à avoir effectué 700 millions de fois l'opération, sans avoir obtenu de palindrome.

### Conjecture du devenir infini de 196 :

196 n'aboutit jamais à un palindrome ?

On appelle **nombre de Lychrel**, les naturels qui *pourraient* ne jamais aboutir à un palindrome. [OEIS, [A023108](#)] : 196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986, 1 495, 1 497, 1 585, ...

“Le tableau [des records] suggère « expérimentalement » que si l'apparition d'un palindrome ne se produit pas rapidement, elle risque fort de ne pas survenir du tout.” Mais “tenter sa chance une infinité de fois, même si les chances sont petites et diminuent, peut donner une probabilité élevée de réussite, voir une certitude.”

Et après avoir obtenu un palindrome que se passe-t-il ?

### Conjecture d'un autre palindrome inévitable :

Tout palindrome finit par aboutir à un autre palindrome ?

# Table des matières

1	Définition du processus	1
2	Sur 1 chiffres : de 0 à 9	1
3	Sur 2 chiffres : de 00 à 99	1
4	Sur 3 chiffres : de 000 à 999	3
5	Sur 4 chiffres : de 0000 à 9999	4
6	Sur 5 chiffres : de 00000 à 99999	5
7	Un autre processus, irrésolu	6
	Table des matières	7