Les naturels de 3 chiffres aboutissent à 495

olivier_pirson_opi@yahoo.fr
http://www.opimedia.be/

lundi 2 janvier 2012

Résumé

Petit processus itératif jouant sur les chiffres des naturels écrits en base 10. Suivi d'un autre processus aboutissant à des palindromes.

1 Définition du processus

Prenons un naturel de 3 chiffres (en base 10), par exemple 123.
On lui applique le processus suivant :

$$\begin{array}{lr} \text{permuter les chiffres pour écrire le plus grand nombre possible :} & 321 \\ \text{permuter les chiffres pour écrire le plus petit nombre possible :} & 123 \\ \hline \text{effectuer la soustraction :} & 198 \end{array}$$

On recommence le même processus avec 198 : $981 - 189 = 792$. Et ainsi de suite…
On obtient le parcours suivant : $123 \longmapsto 198 \longmapsto 792 \longmapsto 693 \longmapsto 594 \longmapsto 495 \hookleftarrow$

On constate (en essayant) que les naturels de 3 chiffres (non tous identiques) aboutissent au point fixe 495.

2 Sur 1 chiffres : de 0 à 9

Sur 1 chiffre le comportement du processus est trivial, le résultat est immédiatement 0.

3 Sur 2 chiffres : de 00 à 99

Voyons ce que le même processus donne avec 2 chiffres.

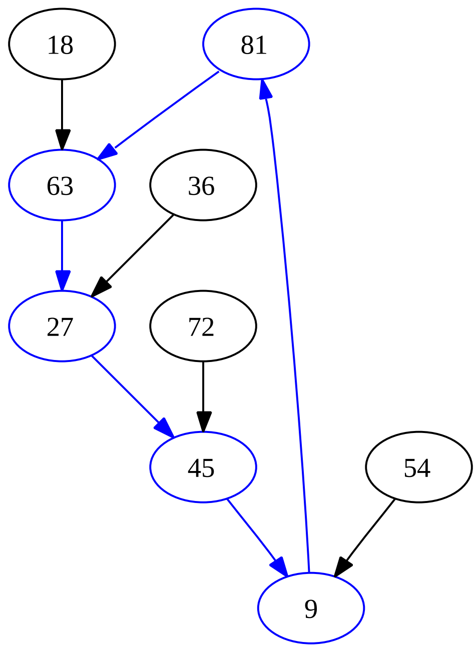
Soit $\overline{ba}^{10} = 10b + a$ avec $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Si $a = b$ alors $\overline{ba}^{10} \longmapsto 0 \hookleftarrow$

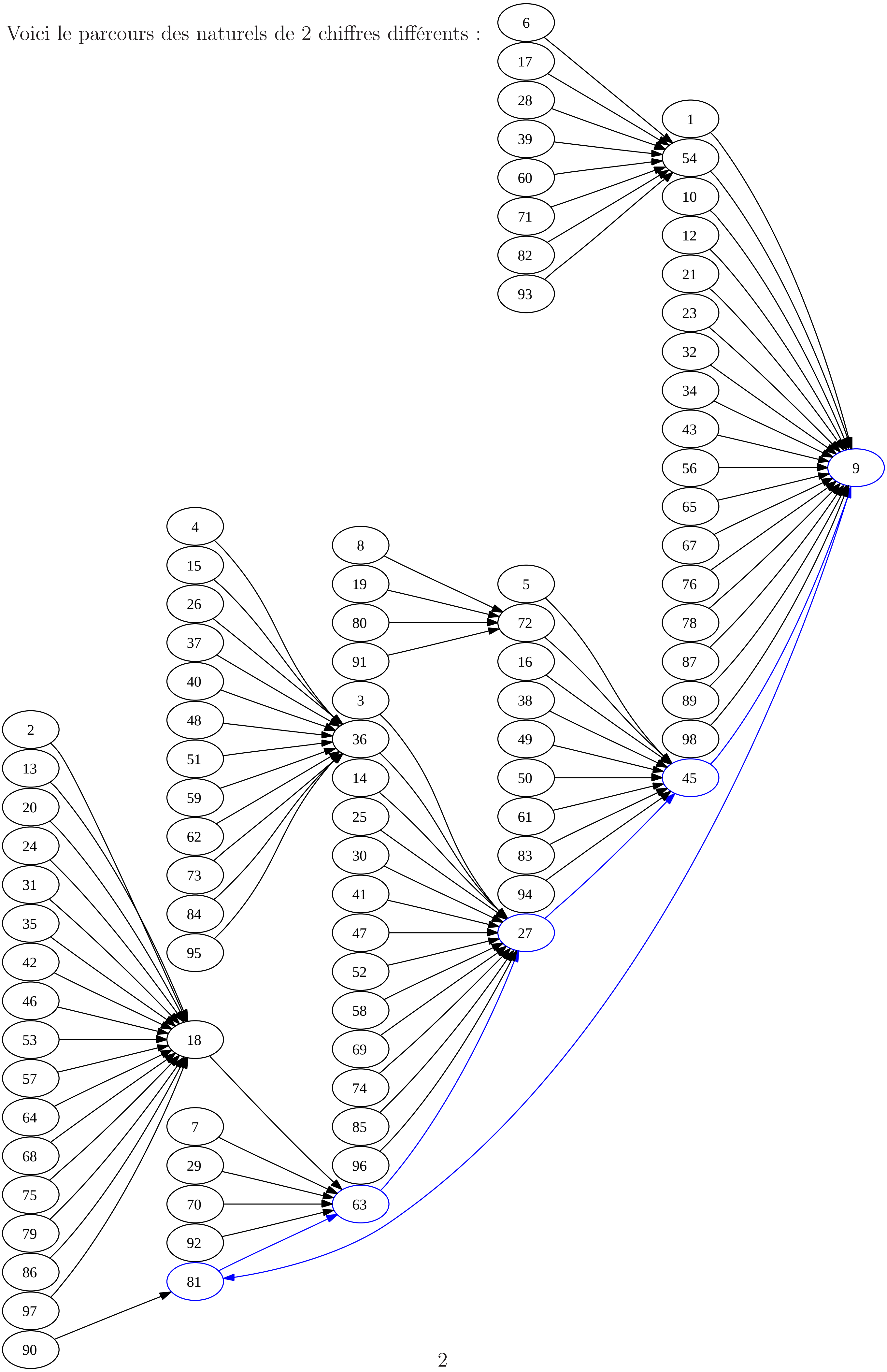
Remarquons que les deux naturels $\overline{ba}^{10}$ et $\overline{ab}^{10}$ aboutissent directement au même résultat. Nous pouvons donc nous restreindre à ne considérer que les cas tels que $a < b$.
Ce qui donne :

$$\begin{array}{l} \overline{ba}^{10} = 10b + a \\ \overline{ab}^{10} = 10a + b \\ \hline 10(b - a) + a - b = 9(b - a) \end{array}$$

Nous sommes donc ramené aux multiples non nuls de 9 ($\leqslant 81 = 9.9$), dont le parcours est représenté ci-contre :



Voici le parcours des naturels de 2 chiffres différents :



4 Sur 3 chiffres : de 000 à 999

Revenons sur 3 chiffres.

Soit $\overline{cba}^{10} = 100c + 10b + a \qquad$ avec $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

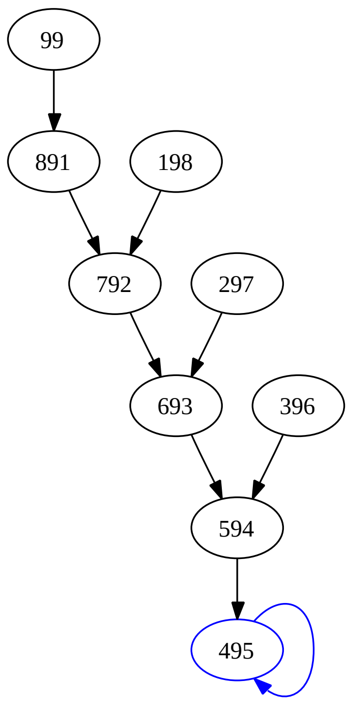
Si $a = b = c$ alors $\overline{cba}^{10} \longmapsto 0 \hookleftarrow$

Remarquons encore que si nous permutons les chiffres a, b et c, les naturels obtenus aboutissent directement au même résultat. Nous pouvons donc nous restreindre à ne considérer que les cas tels que $a \leqslant b \leqslant c$, non tous égaux.

Ce qui donne :

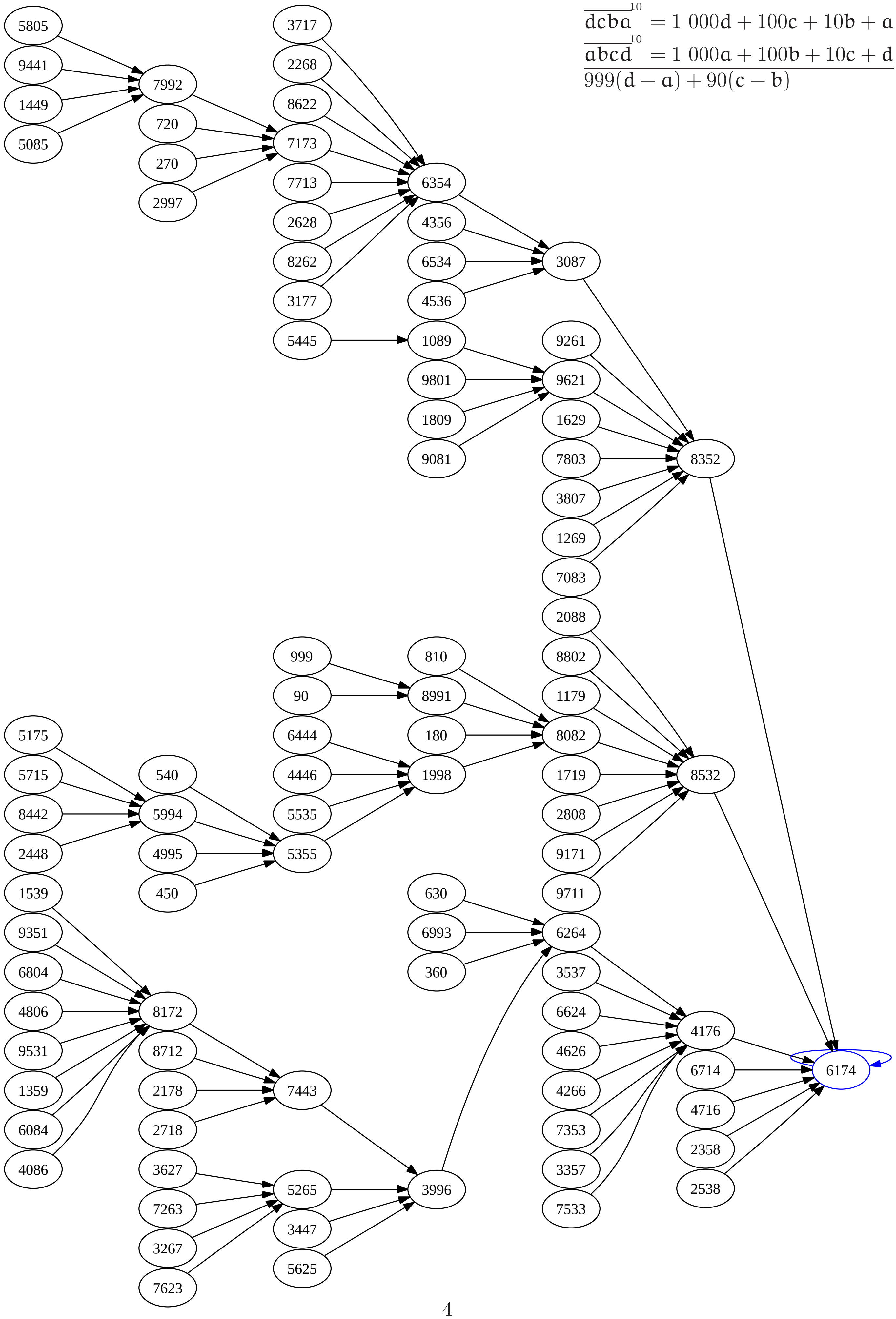
$$\begin{array}{l} \overline{cba}^{10} = 100c + 10b + a \\ \underline{\overline{abc}^{10} = 100a + 10b + c} \\ 100(c-a) + a - c = 99(c-a) \end{array}$$

Nous sommes donc ramené aux multiples non nuls de 99 ($\leqslant 891 = 99.9$), dont voici le parcours :



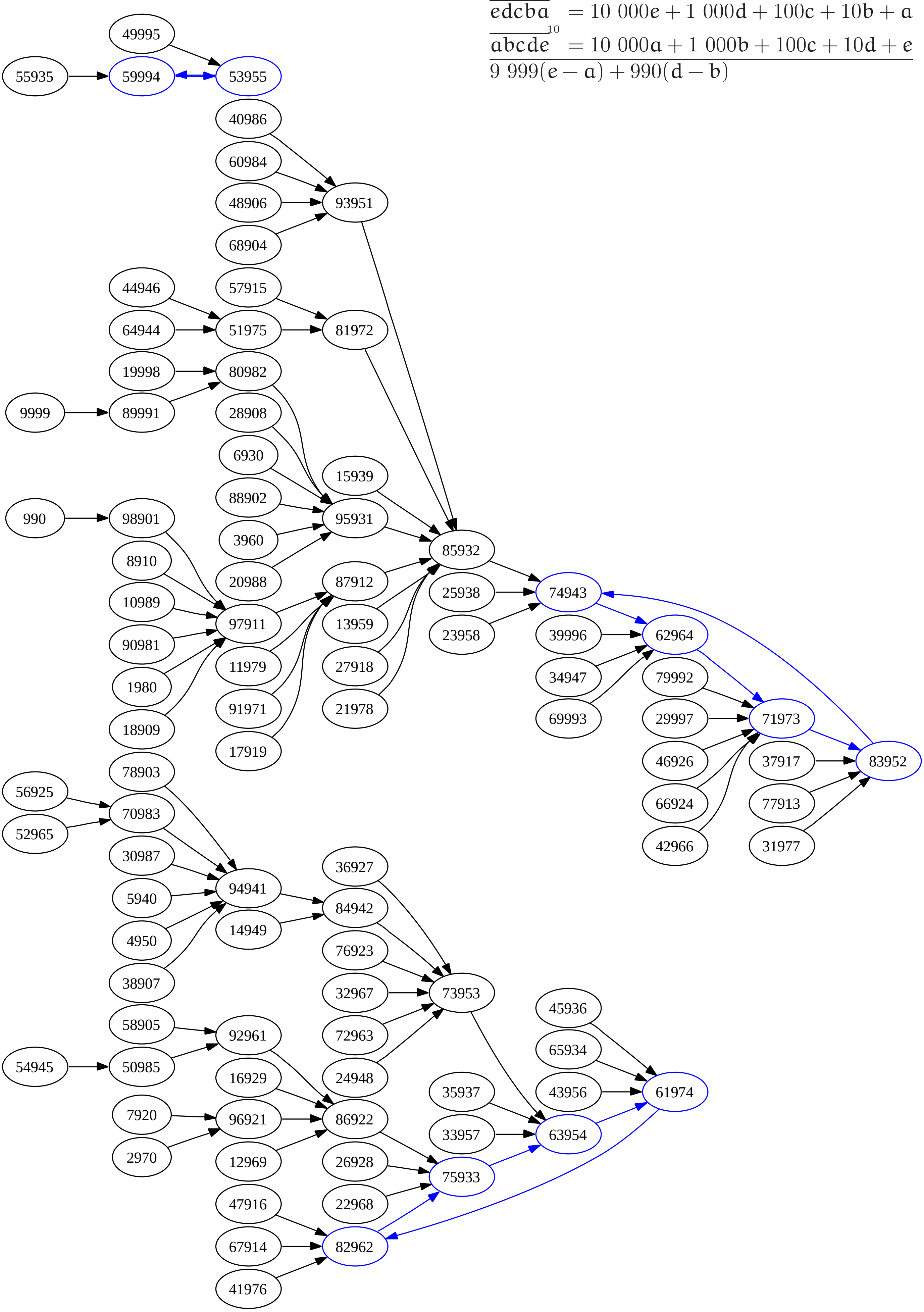
5 Sur 4 chiffres : de 0 000 à 9 999

$$\overline{dcba}^{10} = 1\ 000d + 100c + 10b + a$$
$$\overline{abcd}^{10} = 1\ 000a + 100b + 10c + d$$
$$999(d-a) + 90(c-b)$$



6 Sur 5 chiffres : de 00 000 à 99 999

$$\overline{edcba}^{10} = 10\,000e + 1\,000d + 100c + 10b + a$$
$$\overline{abcde}^{10} = 10\,000a + 1\,000b + 100c + 10d + e$$
$$9\,999(e-a) + 990(d-b)$$



7 Un autre processus, irrésolu

Maintenant, additionnons plutôt un naturel avec lui-même écrit dans l'autre sens (en base 10).
Par exemple pour 789 :

$$\begin{array}{r} 789 \\ 987 \\ \hline 1\ 776 \end{array}$$

Et on recommence ce nouveau processus avec le naturel obtenu, jusqu'à aboutir à un palindrome.
Cela donne le parcours : $789 \longmapsto 1\ 776 \longmapsto 8\ 547 \longmapsto 16\ 005 \longmapsto 66\ 066$

(Cf. *Déconcertantes conjectures*. Jean-Paul DELAHAYE, rubrique *Logique et calcul* p.92
in *Pour la Science* n°367, mai 2008)

Le cas de 89 est assez long :
$89 \longmapsto 187 \longmapsto 968 \longmapsto 1\ 837 \longmapsto 9\ 218 \longmapsto 17\ 347 \longmapsto 91\ 718 \longmapsto 173\ 437 \longmapsto 907\ 808$
$\longmapsto 1\ 716\ 517 \longmapsto 8\ 872\ 688 \longmapsto 17\ 735\ 476 \longmapsto 85\ 189\ 247 \longmapsto 159\ 487\ 405 \longmapsto 664\ 272\ 356$
$\longmapsto 1\ 317\ 544\ 822 \longmapsto 3\ 602\ 001\ 953 \longmapsto 7\ 193\ 004\ 016 \longmapsto 13\ 297\ 007\ 933 \longmapsto 47\ 267\ 087\ 164$
$\longmapsto 93\ 445\ 163\ 438 \longmapsto 176\ 881\ 317\ 877 \longmapsto 955\ 594\ 506\ 548 \longmapsto 1\ 801\ 200\ 002\ 107$
$\longmapsto 8\ 813\ 200\ 023\ 188$

Conjecture du palindrome inévitable :
Tout naturel finit par aboutir à un palindrome ?

(En base $2^{\mathrm{i}} (\mathrm{i} \in \mathbb{N}_*)$, 11, 17, 20 et 26, les équivalents de cette conjecture ont été prouvées fausses.)

Mais le cas de 196 lui ...
$196 \longmapsto 887 \longmapsto 1\ 675 \longmapsto 7\ 436 \longmapsto 13\ 783 \longmapsto 52\ 514 \longmapsto 94\ 039 \longmapsto 187\ 088 \longmapsto 1\ 067\ 869$
$\longmapsto 10\ 755\ 470 \longmapsto 18\ 211\ 171 \longmapsto 35\ 322\ 452 \longmapsto 60\ 744\ 805 \longmapsto 111\ 589\ 511 \longmapsto 227\ 574\ 622$
$\longmapsto 454\ 050\ 344 \longmapsto 897\ 100\ 798 \longmapsto 1\ 794\ 102\ 596 \longmapsto 8\ 746\ 117\ 567 \longmapsto 16\ 403\ 234\ 045$
$\longmapsto \dots$
Eh bien peut-être, mais on ne sait pas ! Les calculs ont été poussés jusqu'à avoir effectué 700 millions de fois l'opération, sans avoir obtenu de palindrome.

Conjecture du devenir infini de 196 :
196 n'aboutit jamais à un palindrome ?

On appelle **nombre de Lychrel**, les naturels qui *pourraient* ne jamais aboutir à un palindrome.
[OEIS, A023108] : $196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986, 1\ 495, 1\ 497, 1\ 585, \dots$

“Le tableau [des records] suggère « expérimentalement » que si l'apparition d'un palindrome ne se produit pas rapidement, elle risque fort de ne pas survenir du tout.” Mais “tenter sa chance une infinité de fois, même si les chances sont petites et diminuent, peut donner une probabilité élevée de réussite, voir une certitude.”

Et après avoir obtenu un palindrome que se passe-t-il ?

Conjecture d'un autre palindrome inévitable :
Tout palindrome finit par aboutir à un autre palindrome ?

Table des matières