Partitions de naturels

3
$1+2$
$1+1+1$

Olivier Pirson
olivier_pirson_opi@yahoo.fr
http://www.opimedia.be/

mercredi 28 avril 2010

1 Définitions et notations

Une composition est une suite finie de naturels non nuls appelés termes.
Une composition de $n \in \mathbb{N}$ est une composition dont la somme des termes vaut n. Par ex., $(2,2,1)$ est une composition de $2+2+1=5$.

On appelle diagramme de FERRER[1] des compositions $(1,2,2)$ et $(2,1,2)$ par ex., les diagrammes $\begin{array}{lll}\bullet & \bullet & 2\\ \bullet & \bullet & 2\\ \bullet & & 1\end{array}$ et $\begin{array}{lll}\bullet & \bullet & 2\\ \bullet & & 1\\ \bullet & \bullet & 2\end{array}$.

Le diagramme conjugué $\begin{array}{llll}\bullet & \bullet & \bullet & 3\\ \bullet & \bullet & & 2\end{array}$ ("transposition" de la "matrice") donne la composition conjuguée $(2,3)$. On dit qu'une composition est une composition autoconjuguée si elle est identique à sa conjuguée. Par ex., la composition $(1,1,3)$ est autoconjuguée $\begin{array}{lll}\bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & & \\ \bullet & & \end{array}$.

$\mathcal{C} :=$ ensemble des compositions $= \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}_*^k$ $\qquad C := \#\,\mathcal{C} = \infty$

$\mathcal{C}(\mathrm{prop}) :=$ ensemble des compositions qui vérifient la propriété prop

$C(\mathrm{prop}) := \#\,\mathcal{C}(\mathrm{prop}) \in \overline{\mathbb{N}}$

$\forall E \subseteq \mathbb{N}_* :\ \mathcal{C}(E) := \mathcal{C}(\text{termes} \in E)$ $\qquad C(E) := \#\,\mathcal{C}(E) \in \{1,\infty\}$

$\forall k \in \mathbb{N} :\ \mathcal{C}_k := \mathcal{C}(\text{composition de } k \text{ termes})$ $\qquad C_k := \#\,\mathcal{C}_k \in \{1,\infty\}$

$\forall n \in \mathbb{N} :\ \mathcal{C}(n) := \mathcal{C}(\text{composition de } n)$ $\qquad C(n) := \#\,\mathcal{C}(n) \in \mathbb{N}_*$

[OEIS, A011782]

Une partition est une composition ordonée (de façon croissante). Par ex., $(1,2,2)$ est une partition de $1+2+2=5$.

$\mathcal{P} :=$ ensemble des partitions $= \mathcal{C}(\text{termes ordonnés})$ $\qquad P := \#\,\mathcal{P} = \infty$

$\mathcal{P}(\mathrm{prop}) =$ ensemble des partitions qui vérifient prop

$P(\mathrm{prop}) := \#\,\mathcal{P}(\mathrm{prop}) \in \overline{\mathbb{N}}$

$\forall E \subseteq \mathbb{N}_* :\ \mathcal{P}(E) := \mathcal{P}(\text{termes} \in E)$ $\qquad P(E) := \#\,\mathcal{P}(E) \in \{1,\infty\}$

$\forall k \in \mathbb{N} :\ \mathcal{P}_k := \mathcal{P}(\text{partition de } k \text{ termes})$ $\qquad P_k := \#\,\mathcal{P}_k \in \{1,\infty\}$

$\forall n \in \mathbb{N} :\ \mathcal{P}(n) := \mathcal{P}(\text{partition de } n)$ $\qquad P(n) := \#\,\mathcal{P}(n) \in \mathbb{N}_*$

[OEIS, A000041]

$\mathcal{P}^* :=$ ensemble des compositions non ordonnées $\qquad P^* := \#\,\mathcal{P}^* = \infty$
$\quad = \mathcal{C}(\text{au moins deux termes non ordonnés})$

$\mathcal{P}^*(\mathrm{prop}) =$ ensemble des compositions non ordonées qui vérifient prop

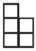
$P^*(\mathrm{prop}) := \#\,\mathcal{P}^*(\mathrm{prop}) \in \overline{\mathbb{N}}$

$\forall E \subseteq \mathbb{N}_* :\ \mathcal{P}^*(E) := \mathcal{P}^*(\text{termes} \in E)$ $\qquad P^*(E) := \#\,\mathcal{P}^*(E) \in \{0,\infty\}$

$\forall k \in \mathbb{N} :\ \mathcal{P}^*_k := \mathcal{P}^*(\text{composition de } k \text{ termes})$ $\qquad P^*_k := \#\,\mathcal{P}^*_k \in \{0,\infty\}$

$\forall n \in \mathbb{N} :\ \mathcal{P}^*(n) := \mathcal{P}^*(\text{composition de } n)$ $\qquad P^*(n) := \#\,\mathcal{P}^*(n) \in \mathbb{N}$

Ex. : $\mathcal{C}_3(5 \mid \text{termes ordonnées}) = \mathcal{P}_3(5) = \mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}(5) = \{(1,1,3),(1,2,2)\}$

1. Correspond au tableau de YOUNG  en physique quantique.

[2]

n	$\mathcal{P}(n)$	diag.	diag. et parti. conj.		$\mathcal{P}^*(n) = \mathcal{C}(n) \setminus \mathcal{P}(n)$
0	()			()	
1	(1)	•	•	(1)	
2	(2)	• •	• •	(1, 1)	
	(1, 1)	• •	• •	(2)	
3	(3)	• • •	• • •	(1, 1, 1)	
	(1, 2)	• • •	• • •	(1, 2)	(2, 1)
	(1, 1, 1)	• • •	• • •	(3)	
4	(4)	• • • •	• • • •	(1, 1, 1, 1)	
	(1, 3)	• • • •	• • • •	(1, 1, 2)	(3, 1)
	(2, 2)	• • • •	• • • •	(2, 2)	
	(1, 1, 2)	• • • •	• • • •	(1, 3)	(1, 2, 1), (2, 1, 1)
	(1, 1, 1, 1)	• • • •	• • • •	(4)	
5	(5)	• • • • •	• • • • •	(1, 1, 1, 1, 1)	
	(1, 4)	• • • • •	• • • • •	(1, 1, 1, 2)	(4, 1)
	(2, 3)	• • • • •	• • • • •	(1, 2, 2)	(3, 2)
	(1, 1, 3)	• • • • •	• • • • •	(1, 1, 3)	(1, 3, 1), (3, 1, 1)
	(1, 2, 2)	• • • • •	• • • • •	(2, 3)	(2, 1, 2), (2, 2, 1)
	(1, 1, 1, 2)	• • • • •	• • • • •	(1, 4)	(1, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1)
	(1, 1, 1, 1, 1)	• • • • •	• • • • •	(5)	
...					

FIGURE 1 – Premières valeurs pour $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}^*(n)$, et donc $\mathcal{C}(n)$.

2. Les partitions autoconjuguées sont en bleu.

n	$P(n)$	$P^*(n)$	$P(n) + P^*(n) = C(n)$
0	$F_1 = 1$	**0**	1
1	$F_2 = \mathbf{1}$	0	**1**
2	$F_3 = \mathbf{2}$	0	**2**
3	$F_4 = \mathbf{3}$	1	4
4	$F_5 = 5$	3	8
5	7	9	16
6	11	21	32
7	15	49	64
8	22	106	128
9	30	226	256
10	42	470	512
11	56	968	1 024
12	77	1 971	2 048
13	101	3 995	4 096
14	135	8 057	8 192
15	176	16 208	16 384
16	231	32 537	32 768
17	297	65 239	65 536
18	385	130 687	131 072
19	490	261 654	262 144
20	627	523 661	524 288
21	792	1 047 784	1 048 576
22	1 002	2 096 150	2 097 152
23	1 255	4 193 049	4 194 304
24	1 575	8 387 033	8 388 608
25	1 958	16 775 258	16 777 216
26	2 436	33 551 996	33 554 432
27	3 010	67 105 854	67 108 864
28	3 718	134 214 010	134 217 728
29	4 565	268 430 891	268 435 456
30	5 604	536 865 308	536 870 912
31	6 842	1 073 734 982	1 073 741 824
32	8 349	2 147 475 299	2 147 483 648
33	10 143	4 294 957 153	4 294 967 296
34	12 310	8 589 922 282	8 589 934 592
35	14 883	17 179 854 301	17 179 869 184
36	17 977	34 359 720 391	34 359 738 368
37	21 637	68 719 455 099	68 719 476 736
38	26 015	137 438 927 457	137 438 953 472
39	31 185	274 877 875 759	274 877 906 944
40	37 338	549 755 776 550	549 755 813 888
41	44 583	1 099 511 583 193	1 099 511 627 776
42	53 174	2 199 023 202 378	2 199 023 255 552
43	63 261	4 398 046 447 843	4 398 046 511 104

44	75 175	8 796 092 947 033	8 796 093 022 208
45	89 134	17 592 185 955 282	17 592 186 044 416
46	105 558	35 184 371 983 274	35 184 372 088 832
47	124 754	70 368 744 052 910	70 368 744 177 664
48	147 273	140 737 488 208 055	140 737 488 355 328
49	173 525	281 474 976 537 131	281 474 976 710 656
50	204 226	562 949 953 217 086	$\sim 10^{15}$
51	239 943	1 125 899 906 602 681	$\sim 10^{15}$
52	281 589	2 251 799 813 403 659	$\sim 10^{15}$
53	329 931	4 503 599 627 040 565	$\sim 10^{16}$
54	386 155	9 007 199 254 354 837	$\sim 10^{16}$
55	451 276	18 014 398 509 030 708	$\sim 10^{16}$
56	526 823	36 028 797 018 437 145	$\sim 10^{17}$
57	614 154	72 057 594 037 313 782	$\sim 10^{17}$
58	715 220	144 115 188 075 140 652	$\sim 10^{17}$
59	831 820	288 230 376 150 879 924	$\sim 10^{17}$
60	966 467	576 460 752 302 457 021	$\sim 10^{18}$
61	1 121 505	1 152 921 504 605 725 471	$\sim 10^{18}$
62	1 300 156	2 305 843 009 212 393 796	$\sim 10^{18}$
63	1 505 499	4 611 686 018 425 882 405	$\sim 10^{19}$
64	1 741 630	9 223 372 036 853 034 178	$\sim 10^{19}$
65	2 012 558	18 446 744 073 707 539 058	$\sim 10^{19}$
66	2 323 520	36 893 488 147 416 779 712	$\sim 10^{20}$
67	2 679 689	73 786 976 294 835 526 775	$\sim 10^{20}$
68	3 087 735	147 573 952 589 673 325 193	$\sim 10^{20}$
69	3 554 345	295 147 905 179 349 271 511	$\sim 10^{20}$
70	4 087 968	590 295 810 358 701 563 744	$\sim 10^{21}$
...			
80	15 796 476	604 462 909 807 314 571 556 612	$\sim 10^{24}$
90	56 634 173	618 970 019 642 690 137 392 927 939	$\sim 10^{27}$
100	190 569 292	633 825 300 114 114 700 748 161 033 396	$\sim 10^{30}$
...			
n			2^{n-1}

n	$P(n)$	$P^*(n) \simeq C(n)$
200	3 972 999 029 388	$\sim 10^{60}$
300	9 253 082 936 723 602	$\sim 10^{90}$
400	6 727 090 051 741 041 926	$\sim 10^{120}$
500	2 300 165 032 574 323 995 027	$\sim 10^{150}$
600	458 004 788 008 144 308 553 622	$\sim 10^{180}$
700	60 378 285 202 834 474 611 028 659	$\sim 10^{210}$
800	5 733 052 172 321 422 504 456 911 979	$\sim 10^{241}$
900	415 873 681 190 459 054 784 114 365 430	$\sim 10^{271}$
1000	24 061 467 864 032 622 473 692 149 727 991	$\sim 10^{301}$
...		

Figure 2 – Quelques valeurs pour $P(n)$, $P^*(n)$ et $C(n)$

2 Quelques banales trivialités

$$\mathcal{C}(0) = \mathcal{P}(0) = \{()\} \qquad \mathrm{C}(0) = \mathrm{P}(0) = \mathrm{C}(1) = \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}^*(3) = 1$$

$$\mathcal{P}^*(0) = \mathcal{P}^*(1) = \mathcal{P}^*(2) = \emptyset \qquad \mathrm{P}^*(0) = \mathrm{P}^*(1) = \mathrm{P}^*(2) = 0$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathrm{prop}) \oplus \mathcal{C}(\neg\mathrm{prop}) \qquad \mathrm{C} = \mathrm{C}(\mathrm{prop}) + \mathrm{C}(\neg\mathrm{prop}) = \infty$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^* \qquad \mathrm{C} = \mathrm{P} + \mathrm{P}^* = \infty$$

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_k = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(n) \qquad \mathrm{P} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{P}_k = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(n) = \infty$$

$$\mathcal{P}^* = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^*_k = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^*(n) \qquad \mathrm{P}^* = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{P}^*_k = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}^*(n) = \infty$$

$\forall k \in \mathbb{N}:$

$$\mathcal{P}_k = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_k(n) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}+k} \mathcal{P}_k(n)$$

$$\mathrm{P}_k = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}_k(n) = \sum_{n\in\mathbb{N}+k} \mathrm{P}_k(n) \quad \in \{1,\infty\}$$

$$\mathcal{P}^*_k = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^*_k(n) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}+k+1} \mathcal{P}^*_k(n)$$

$$\mathrm{P}^*_k = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}^*_k(n) = \sum_{n\in\mathbb{N}+k+1} \mathrm{P}^*_k(n) \in \{0,\infty\}$$

$\forall n \in \mathbb{N}:$

$$\mathcal{P}(n) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_k(n) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(n)$$

$$\mathrm{P}(n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{P}_k(n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_k(n) \in \mathbb{N}_*$$

$$\mathcal{P}^*(n) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^*_k(n) = \bigoplus_{k=2}^{n-1} \mathcal{P}^*_k(n)$$

$$\mathrm{P}^*(n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{P}^*_k(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \mathrm{P}^*_k(n) \in \mathbb{N}$$

La conjuguée de toute composition est une partition de même somme.

$\forall k, n \in \mathbb{N}:$

$$\mathcal{C}_k(n \,|\, \text{composition autoconjuguée}) = \mathcal{P}_k(n \,|\, \text{partition autoconjuguée})$$

$n = 0$ ou 1 : $\mathcal{P}(n \,|\, \text{partition non autoconjuguée}) = \emptyset$

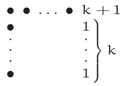
$\forall n \in \mathbb{N}+2:$ $\mathcal{P}(n \,|\, \text{partition non autoconjuguée}) \supseteq \{(\underbrace{1,\ldots,1}_{n}), (n)\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(2 \,|\, \text{partition autoconjuguée}) &= \emptyset \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2\} : \mathcal{P}(n \,|\, \text{partition autoconjuguée}) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

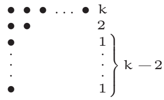
Démonstration

$\mathcal{P}(0 \,|\, \text{partition autoconjuguée}) = \{()\}$

$(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, k+1)$ est une partition autoconjuguée de $n = 2k+1$



$(\underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}, 2, k)$ est une partition autoconjuguée de $n = 2k > 2$



$\square$

$$\begin{array}{lr} n = 0, 1 \text{ ou } 2 : \mathcal{P}(n) = \mathcal{C}(n) & P(n) = C(n) \\ \forall n \in \mathbb{N}{+}3 : \quad \mathcal{P}(n) \subset \mathcal{C}(n) & P(n) < C(n) \end{array}$$

Démonstration

$(1, n-1)$ et $(n-1, 1)$ sont deux compositions distinctes de n correspondant à la même partition $(1, n-1)$. $\square$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ \mathcal{P}^*(n) \subset \mathcal{C}(n) \qquad P^*(n) < C(n)$$

3 Sort des compositions

$$\forall k, n \in \mathbb{N} : \ C_k(n) = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} & \text{si } 0 < k \leqslant n \\ 1 & \text{si } 0 = k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration

$\underbrace{1\ 1\ 1 \dots 1}_{n}$ avec $0 < k \leqslant n$

Il y a $n-1$ places entre les n nombres 1 où placer des signes $+$. Si on place $k-1$ signes $+$ et additionne les nombres 1 contigus, cela donne les $\binom{n-1}{k-1}$ compositions de n de k termes. $\square$

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \forall k \leqslant n+1 \in \mathbb{N} : \ C_k(n) = C_{n+1-k}(n)$$

$$\begin{aligned} C(0) &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}_* : C(n) &= 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_* : \ C(n+1) = 2\,C(n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ C(n) = \lceil 2^{n-1} \rceil = \sum_{k=0}^{n} C_k(n)$$

4 Quelques longueurs pour les partitions

$$\boxed{\forall k, n \in \mathbb{N} : \ P_k(n) = P_k(n + k \,|\, \text{termes} > 1)}$$

Démonstration
Si $(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1})$ est une partition de n de k termes
alors $(n_0 + 1, n_1 + 1, \ldots, n_{k-1} + 1)$ est une partition de $n + k$ de k termes > 1.

Inversement, si $(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1})$ est une partition de $n + k$ de k termes > 1
alors $(n_0 - 1, n_1 - 1, \ldots, n_{k-1} - 1)$ est une partition de n de k termes. □

$$\boxed{\forall k, n \in \mathbb{N} : \ P_k(n) = P_{k+1}(n + 1 \,|\, \text{au moins 1 terme} = 1)}$$

Démonstration
Si $(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1})$ est une partition de n de k termes
alors $(1, n_0, n_1, \ldots, n_{k-1})$ est une partition de $n + 1$ de $k + 1$ termes.
Et inversement. □

$$\boxed{\forall k, n \in \mathbb{N} : \ \mathcal{P}_k(n) = \mathcal{P}_k(n \,|\, \text{termes} > 1) \oplus \mathcal{P}_k(n \,|\, \text{au moins 1 terme} = 1)}$$

$$\boxed{\forall k, n \in \mathbb{N} : \ P_k(n) = \begin{cases} P_k(n-k) + P_{k-1}(n-1) & \text{si } 0 < k \leqslant n \\ 1 & \text{si } 0 = k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

$$\boxed{\forall k, n \in \mathbb{N}_*, \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor < k \leqslant n : \ P_k(n) = P_{k-1}(n-1)}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall n \in \mathbb{N}_* : \mathcal{P}_0(n) = \emptyset & P_0(n) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}_* : \mathcal{P}_1(n) = \{(n)\} & P_1(n) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : \ \mathcal{P}_2(n) = \{(1, n-1), (2, n-2), \ldots, (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil)\} & P_2(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \forall n \in \mathbb{N}{+}6 : \mathcal{P}_{n-3}(n) & = \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-4}, 4), (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-5}, 2, 3), (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-6}, 2, 2, 2)\} \\ \forall n \in \mathbb{N}{+}4 : \mathcal{P}_{n-2}(n) & = \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-3}, 3), (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-4}, 2, 2)\} \\ \forall n \in \mathbb{N}{+}2 : \mathcal{P}_{n-1}(n) & = \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-2}, 2)\} \\ \forall n \in \mathbb{N} : \quad \mathcal{P}_n(n) & = \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})\} \end{array}}$$

$$\boxed{\forall k \leqslant n \in \mathbb{N} : \ P_k(n) = P_{\leqslant k}(n-k) = \sum_{i=0}^{k} P_i(n-k)}$$

Démonstration
- $k = 0 : P_0(n) = P_{\leqslant 0}(n)$

$$\bullet\ 0 < k \leqslant n : \begin{aligned}[t] P_k(n) &= P_k(n-k) + P_{k-1}(n-1) \\ &= P_k(n-k) + P_{k-1}(n-k) + P_{k-2}(n-2) \\ &\dots \\ &= P_k(n-k) + P_{k-1}(n-k) + \cdots + P_1(n-k) + P_0(n-k) \end{aligned}$$

□

$$\boxed{\begin{array}{llll} \forall \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leqslant k \leqslant n \in \mathbb{N} : P_k(n) = P(n-k) & & P_{\geqslant k}(n) & = \sum\limits_{i=0}^{n-k} P(i) \\ \forall k \geqslant n \in \mathbb{N} : & P(n) = P_k(n+k) & P_{\geqslant k}(n+k) & = \sum\limits_{i=0}^{n} P(i) \end{array}}$$

Démonstration

Pour $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leqslant k \leqslant n : P_k(n) = P_{\leqslant k}(n-k) = P_{\leqslant n-k}(n-k) = P(n-k)$

$$P_{\geqslant k}(n) = \sum_{i=k}^{n} P_i(n) = \sum_{i=k}^{n} P(n-i) = \sum_{i=0}^{n-k} P(i)$$

Pour $k \geqslant n : P_k(n+k) = P_{\leqslant k}(n) = P_{\leqslant n}(n) = P(n)$

$$\begin{aligned} P_{\geqslant k}(n+k) &= \sum_{i=k}^{n+k} P_i(n+k) = \sum_{i=0}^{n} P_{k+i}(n+k) \\ &= \sum_{i=0}^{n} P_{k+i}(n-i+k+i) = \sum_{i=0}^{n} P(n-i) = \sum_{i=0}^{n} P(i) \end{aligned}$$

□

$$\boxed{\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} :\ P(n) &= P_n(2n) && = P_{2n}(3n) \\ &= P_{n+1}(2n+1) && = P_{2n+1}(3n+1) \\ & && = P_{2n+2}(3n+2) \end{aligned}}$$

5 Inégalités

$$\boxed{\begin{aligned} P(0) &= P(1) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}_* : P(n) &< P(n+1) \end{aligned}}$$

croissance de P

Démonstration

Si $(n_0, \dots, n_{k-1}) \neq (n'_0, \dots, n'_{k'-1}) \ \in \mathcal{P}(n)$

alors $(1, n_0, \dots, n_{k-1}) \neq (1, n'_0, \dots, n'_{k'-1}) \ \in \mathcal{P}(n+1)$

et $(n+1) \in \mathcal{P}(n+1)$ or $() \notin \mathcal{P}(n)$

□

$$\boxed{\begin{array}{ll} & 0 < P(0) = 1 \\ n = 1, 2 \text{ ou } 3 : & n = P(n) \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,3\} : & n < P(n) \end{array}}$$

borne inférieure de P

Démonstration

Si n pair $\geqslant 4 : n = 2k$

$(1, 2k-1), (2, 2k-2), \dots, (k, k)$: k partitions de n

$(1, 1, 2k-2), (1, 2, 2k-3), \dots, (1, k-1, k)$: $k-1$ partitions de n

$(1,1,\dots,1),(n)$: 2 partitions de n

Ces $2k+1$ partitions de n sont distinctes, donc $P(2k) \geqslant 2k+1 > 2k$

Si n impair $\geqslant 5$: $n = 2k+1$

$P(2k+1) > P(2k) > 2k$ $\square$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ \frac{n(n+4)}{8} \leqslant P(n)}$ borne inférieure de P

Démonstration

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}_* : P(n) &= \sum_{k=1}^{n} P_k(n) = \sum_{k=1}^{\lceil n/2\rceil -1} P_k(n) + \sum_{k=\lceil n/2\rceil}^{n} P(n-k)\\ &\geqslant \lceil \tfrac{n}{2} \rceil - 1 + P(0) + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor} P(k)\\ &\geqslant \lceil \tfrac{n}{2} \rceil + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor} P(k) = \lceil \tfrac{n}{2} \rceil + \frac{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor\left(\lfloor \frac{n}{2}\rfloor + 1\right)}{2}\end{aligned}$$

$\square$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k < n \in \mathbb{N}_* : \ P^*_k(n) < P^*_{k+1}(n+1)}$

Démonstration

- $1 = k < n : \mathcal{P}^*_1(n) = \emptyset$ et $\{(n,1)\} \in \mathcal{P}^*_2(n+1)$
- $1 < k < n : (n_0,\dots,n_{k-1}) \in \mathcal{P}^*_k(n) \Longrightarrow (1,n_0,\dots,n_{k-1}) \in \mathcal{P}^*_{k+1}(n+1)$

De plus : si $k > 2 : (n,1) \notin \mathcal{P}^*_k(n)$

$\in \mathcal{P}^*_2(n+1)$

si $k = 2 : (1,n-1,1) \notin \mathcal{P}^*_k(n)$

$\in \mathcal{P}^*_3(n+1)$

$\square$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}{+}2 : \ P^*(n) < P^*(n+1)}$

$$\boxed{\begin{array}{lll} n = 0 \text{ ou } 1 : & P^*(n) = 2\,P^*(n) & = P^*(n+1) = 0\\ & P^*(2) \ = 2\,P^*(2) = 0 & < P^*(3) = 1\\ \forall n \in \mathbb{N}{+}3 : & P^*(n) < 2\,P^*(n) & < P^*(n+1)\end{array}}$$

Démonstration

$\forall n \in \mathbb{N}{+}2$:

$(n_0,\dots,n_{k-1}) \in \mathcal{P}^*(n)$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} k \geqslant 2\\ (1,n_0,\dots,n_{k-1}) \neq (n_0,\dots,n_{k-1},1) \in \mathcal{P}^*_{k+1}(n+1)\end{array}\right.$$

et $(n,1) \in \mathcal{P}^*_2(n+1)$ $\square$

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}_*, \forall n \in \mathbb{N}{+}2 : \ 2^k\,P^*(n) < P^*(n+k)}$

Démonstration

Par récurrence : $2^{k+1}\,P^*(n) < 2\,P^*(n+k) < P^*(n+k+1)$ $\square$

$$\boxed{\begin{aligned} 2\,P(0) = 2 &> P(1) = 1 \\ 2\,P(1) \quad &= P(2) = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\} : 2\,P(n) \quad &> P(n+1) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}_*, \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\} :\ 2^k\,P(n) > P(n+k)}$$

Démonstration

$2^k\,P(0) = 2^k > 2^{k-1} \geqslant P(k)$

et $\forall n \in \mathbb{N}{+}2 :\ 2^k\,P^*(n) < P^*(n+k)$

$$2^k\left(2^{n-1} - P(n)\right) < 2^{n+k-1} - P(n+k)$$

□

? $$\boxed{\begin{aligned} & & 2\,P(0) &= P(2) = 2 \\ & n = 1,2,3,4 \text{ ou } 5 : & 2\,P(n) &< P(n+2) \\ & n = 6 \text{ ou } 7 : & 2\,P(n) &= P(n+2) \\ & \forall n \in \mathbb{N}{+}8 : & 2\,P(n) &\overset{?}{>} P(n+2) \end{aligned}}$$?

? **Démonstration** ?

□

$$\boxed{\begin{aligned} n = 0,1,2,3 \text{ ou } 4 : P(n) &= F_{n+1} \\ \forall n \in \mathbb{N}{+}5 : \quad P(n) &< F_{n+1} \end{aligned}}$$

où F_n sont les nombres de Fibonacci :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
F_n	**0**	**1**	1	2	3	**5**	8	13	21	34	

[OEIS, A000045]

Démonstration

Par récurrence :

- $n = 5 : P(5) = 7 \ < F_6 = 8$
  $n = 6 : P(6) = 11 < F_7 = 13$
  $n = 7 : P(7) = 15 < F_8 = 21$
- $5 \leqslant n \leqslant k : P(n) < F_{n+1}$
- ? $k+1$? À montrer : $P(k+1) < F_{k+2}$?
  $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k > P(k) + P(k-1) > 2\,P(k-1) \overset{?}{\geqslant} P(k+1)$ □

$$\boxed{\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}_* :\ F_n = \sum_{k=0}^{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil} C_{k+1}(n-k) &= \sum_{k=0}^{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil} C_{n-2k}(n-k) \\ = \sum_{k=0}^{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil} \binom{n-1-k}{k} &= \sum_{k=0}^{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil} \binom{n-1-k}{n-1-2k} \end{aligned}}$$

6 Identités

$$\forall k \geqslant n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}_0^* = \mathcal{P}_1^* = \mathcal{P}_k^*(n) = \emptyset$$

$$? \quad \forall 1 < k \leqslant n : \mathcal{P}_k^*(n) \neq \emptyset \overset{?}{\iff} \mathcal{P}_k(n \,|\, \text{termes identiques}) \neq \emptyset \quad ?$$

$$\iff \mathcal{P}_k(n \,|\, \text{termes identiques}) = \left\{ \Big(\underbrace{\frac{n}{k}, \dots, \frac{n}{k}}_{k} \Big) \right\}$$

$$\iff P_k(n \,|\, \text{termes identiques}) > 0$$

$$\iff P_k(n \,|\, \text{termes identiques}) = 1$$

$$\iff k \setminus n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_* : \ P(n \,|\, \text{termes identiques}) = \nu(n) := \text{nombre de diviseurs de } n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$:

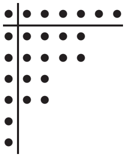
$$\left| \begin{array}{l} P(n \,|\, \text{termes distincts}) = P(n \,|\, \text{termes impairs}) \qquad \text{(identité d'Euler)} \\ P(n \,|\, \text{au moins 2 termes identiques}) = P(n \,|\, \text{au moins 1 terme pair}) \end{array} \right.$$

Démonstration

Soit $(\dots, k, k, \dots)$ une partition de n qui contient au moins 2 termes identiques. Alors $(\dots, 2k, \dots)$ est une partition de n qui contient au moins 1 terme pair. Et inversement. □

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} P(n \,|\, \text{partition autoconjuguée}) \\ \qquad = P(n \,|\, \text{termes distincts et impairs}) \\ P(n \,|\, \text{partition non autoconjuguée}) \\ \qquad = P(n \,|\, \text{au moins 2 termes identiques ou 1 terme pair}) \end{array} \right.$$

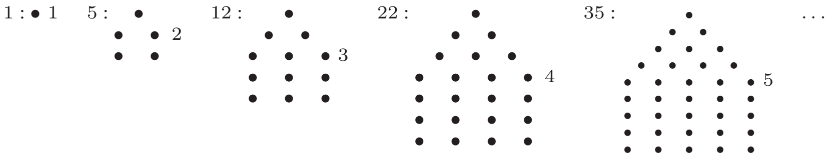
Démonstration



Chaque terme impair distinct $2k + 1$ correspond à une "équerre" de longueur $k + 1$ dans le diagramme de Ferrer. La partition est donc bien autoconjuguée.

Inversement, chaque "équerre" du diagramme de Ferrer de longueur k d'une partition autoconjuguée peut être "dépliée" en un terme impair $2k - 1$. Les "équerres" successives étant différentes, elles donnent des impairs différents. □

Les nombres pentagonaux sont les naturels de la forme $\frac{n(3n-1)}{2}$ où $n \in \mathbb{N}_*$. [OEIS, A000326]



Les nombres pentagonaux généralisés sont les entiers de la forme $\frac{n(3n-1)}{2}$ où $n \in \mathbb{Z}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 …
		1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210	247	287	330
	0	2	7	15	26	40	57	77	100	126	155	187	222	260	301	345

[OEIS, A001318]

$\forall m, n \in \mathbb{Z}:$

$\text{Triang}(n) := \frac{n(n+1)}{2}$ [OEIS, A000217] $\forall n \in \mathbb{N}: \ \text{Triang}(n) = \sum_{i=0}^{n} i$

$\text{Triang}(-n) = \frac{(n-1)n}{2} = \text{Triang}(n-1)$
$\text{Triang}(n+1) = \text{Triang}(n) + n + 1$

$\text{Carre}(n) := n^2 = \text{Carre}(-n) = \text{Rect}(n,n)$ [OEIS, A000079]
$\text{Carre}(n+1) = \text{Carre}(n) + 2n + 1$

$\text{Rect}(m,n) := mn = \text{Rect}(n,m) = \text{Rect}(-m,-n)$
$\text{Rect}(-m,n) = \text{Rect}(n,-m) = -\text{Rect}(m,n)$
$\text{Rect}(m+1,n) = \text{Rect}(m,n) + m$
$\text{Rect}(m+1,n+1) = \text{Rect}(m,n) + m + n + 1$

$\text{Pent}(n) := \frac{n(3n-1)}{2} = \text{Carre}(n) + \text{Triang}(n-1) = \text{Rect}(n-1,n) + \text{Triang}(n)$
$\text{Pent}(-n) = \frac{n(3n+1)}{2} = \text{Pent}(n) + n$ [OEIS, A005449]
$\text{Pent}(n+1) = \text{Pent}(n) + 3n + 1$

$\text{Pent}(n) + \text{Triang}(n) = 2\,\text{Carre}(n)$
$\text{Triang}(-n) = \text{Carre}(n) - \text{Triang}(n) = \text{Pent}(n) - \text{Carre}(n)$
$3\text{Pent}(n) = \text{Triang}(3n-1)$

$\text{Triang}(0) = \text{Carre}(0) = \text{Rect}(0,n) = \text{Rect}(m,0) = \text{Pent}(0) = \mathbf{0}$
$\text{Triang}(1) = \text{Carre}(1) = \text{Rect}(1,1) = \text{Pent}(1) = \mathbf{1}$
$\text{Triang}(2) = 3$
$\text{Carre}(2) = 4$
$\text{Pent}(2) = 5$

Théorème pentagonal d'Euler : ? +cor si n pentagonal

? $\forall n \in \mathbb{N}, n$ non pentagonal généralisé :
$$P(n \mid \text{nombre pairs de termes distincts}) = P(n \mid \text{nombre impairs de termes distincts})$$?

? **Démonstration** ?

□

? $$\forall n \in \mathbb{N}: \ P(n) = -\sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ n \geqslant \text{Pent}(i)}} (-1)^i \, P\left(n - \text{Pent}(i)\right)$$?

7 Congruences

$$\forall n \in \mathbb{N}: \begin{cases} P(5n+4) \equiv 0 \ [5] \\ P(7n+5) \equiv 0 \ [7] \\ P(25n+24) \equiv 0 \ [25] \end{cases}$$

? **Démonstration** ?

□

8 Formule close de Hardy, Ramanujan et Rademacher

$$\boxed{\begin{aligned} &P(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dn}\frac{\sinh\left(\frac{2\pi\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{3k}\right)}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}} \\ &\text{avec}\ \left| \begin{array}{ll} A_k(n) = \sum\limits_{\substack{h<k\\(h,k)=1}} \omega_{h,k} e^{-\frac{2\pi i n h}{k}} & \\ \omega_{h,k} = e^{\pi i S(h,k)} & \text{(racine 24-ième de l'unité)} \\ S(h,k) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \left(\frac{hj}{k} - \left[\frac{hj}{k}\right] - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{j}{k}-\frac{1}{2}\right) & \end{array}\right. \end{aligned}}$$

? $$\boxed{\begin{aligned} &P(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\left[\frac{d}{dx}\frac{\sinh(\frac{\pi}{k})\sqrt{\frac{2}{3}(x-\frac{1}{24})}}{\sqrt{x-\frac{1}{24}}}\right]_{x=n} \qquad \text{(À vérifier !)} \\ &\text{avec}\ \left| \begin{array}{l} A_k(n) = \sum\limits_{\substack{h \mod k\\(h,k)=1}} \omega_{h,k} e^{-\frac{2\pi i n h}{k}} \\ \omega_{h,k}^{24} = \begin{cases} -\frac{k}{h} e^{-\pi i\left[\frac{1}{4}(2-hk-h) + \frac{1}{12}(k-\frac{1}{k})(2h-h'+h^2h')\right]} & \text{si } h \text{ impair} \\ -\frac{h}{k} e^{-\pi i\left[\frac{1}{4}(k-1) + \frac{1}{12}(k-\frac{1}{k})(2h-h'+h^2h')\right]} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \end{array}\right. \end{aligned}}$$?

Autre formule, cf. *Elementary formulas for integer partitions* (Mohamed El Bachraoui) : http://arxiv.org/abs/1004.4849/

9 Comportement limite

$$\boxed{P(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}\ ,\ n \to \infty} \qquad \text{(Hardy, Ramanujan 1918)}$$

? $$\boxed{\begin{aligned} P(n) \sim A_n e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}}\ ,\ n \to \infty \quad \text{avec } A_n &= \frac{1}{2n\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6\frac{n-1}{24}}} - \frac{1}{2\left(\frac{n-1}{24}\right)^{3/2}}\right) \\ &= \frac{\pi(n-1) - 24\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,(n-1)^{3/2} n} \end{aligned}}$$
(Devrait être exacte pour $n = 200$?) ?

$$\boxed{\frac{P(n+1)}{P(n)} \to 1\ ,\ n \to \infty}$$

? $\boxed{P(n+1) - P(n) \to\ ?\ ,\ n \to \infty}$?

$$\boxed{\frac{P(n)}{C(n)} \to 0\ ,\ n \to \infty}$$

$$\boxed{C(n) - P(n) \to \infty\ ,\ n \to \infty}$$

10 Fonctions génératrices

$\forall n \in \mathbb{N}_*$:
$\forall k \in \mathbb{N} :\ C_k(\text{termes distincts} \in \{1, 2, \ldots, n\}) = A_n^k = n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$

$= ?$ $C(\text{termes distincts} \in \{1, 2, \ldots, n\}) = \sum_{k=0}^{n} k!\binom{n}{k}$ $= ?$

$\forall k \in \mathbb{N} :\ C_k(\{1, 2, \ldots, n\}) = \alpha_n^k = n^k$
$C(\{1, 2, \ldots, n\}) = \frac{n^{n+1} - 1}{n - 1}$

$\forall k \in \mathbb{N} :\ P_k(\text{termes distincts} \in \{1, 2, \ldots, n\}) = \binom{n}{k} = C_{k+1}(n + 1)$
$P(\text{termes distincts} \in \{1, 2, \ldots, n\}) = 2^n = C(n + 1)$

$\forall k \in \mathbb{N} :\ P_k(\{1, 2, \ldots, n\}) = \gamma_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$
$P(\{1, 2, \ldots, n\}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{n-1}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall k \in \mathbb{N}, \forall (n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}) \in \mathcal{C}_{k+1}(\text{termes distincts}), \forall n \in \mathbb{N} : \\ P(n \,|\, \text{termes distincts} \in \{n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}\}) \\ = \begin{cases} P(n \,|\, \text{termes distincts} \in \{n_1, \ldots, n_k\}) & \\ \quad + P(n - n_{k+1} \,|\, \text{termes distincts} \in \{n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}\}) & \text{si } n \geqslant n_{k+1} \\ P(n \,|\, \text{termes distincts} \in \{n_1, \ldots, n_k\}) & \text{si } n < n_{k+1} \end{cases}\end{array}}$$

$q \neq 0$?

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall q \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall (n_1, \ldots, n_k) \in \mathcal{C}_k(\text{termes distincts}) : \\ \prod_{i=1}^{k} (1 + q^{n_i}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(n \,|\, \text{termes distincts} \in \{n_1, \ldots, n_k\}).q^n\end{array}}$$

$q \neq 0$?

Démonstration
Par récurrence :
- $k = 0 : 1 = 1.q^0$
- $k + 1 ? : \prod_{i=1}^{k+1} (1 + q^{n_i}) = (1 + q^{n_{k+1}}) \prod_{i=1}^{k} (1 + q^{n_i})$

$$= (1 + q^{n_{k+1}}) \sum_{n \in \mathbb{N}} P(n \,|\, \text{termes distincts} \in \{n_1, \ldots, n_{k+1}\}).q^n$$
$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(n \,|\, \text{termes distincts} \in \{n_1, \ldots, n_{k+1}\}).q^n$$
$$+ \sum_{n \in \mathbb{N}} P(n \,|\, \text{termes distincts} \in \{n_1, \ldots, n_{k+1}\}).q^{n_{k+1}+n}$$

? $\ldots ?$?

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(n \,|\, \text{termes distincts} \in \{n_1,\ldots,n_k,n_{k+1}\}).q^n$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(n \,|\, \text{termes distincts} \in \{n_1,\ldots,n_k\}).q^n$$
$$+ \sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} P(n-n_{k+1} \,|\, \text{termes distincts} \in \{n_1,\ldots,n_k,n_{k+1}\}).q^n$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(n \,|\, \text{termes distincts} \in \{n_1,\ldots,n_k\}).q^n$$
$$+ \sum_{n\in\mathbb{N}} P(n \,|\, \text{termes distincts} \in \{n_1,\ldots,n_k,n_{k+1}\}).q^{n_{k+1}+n}$$

$\ldots ?$

$$= (1+q^{n_{k+1}}) \sum_{n\in\mathbb{N}} P(n \,|\, \text{termes distincts} \in \{n_1,\ldots,n_k\}).q^n$$

□

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall q\in\mathbb{R}, \forall k,l\in\mathbb{N}, \forall (n_1,\ldots,n_k)\in\mathcal{C}_k(\text{termes distincts}) : \\ \quad \prod_{i=1}^{k}(1+\sum_{j=1}^{l} q^{jn_i}) \\ \qquad = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(n \,|\, \text{termes répétés au plus } l \text{ fois} \in \{n_1,\ldots,n_k\}).q^n \end{array}}$$

si $q=0 : (1+0)^k = 1.0^0$
si $l=0 : 1^k = 1.q^0$
si $k=0 : 1 = 1.q^0$

si $q=1 : (1+l)^k = P(\text{termes répétés au plus } l \text{ fois} \in \{n_1,\ldots,n_k\})$
si $q=l=1 : 2^k = P(\text{termes distincts} \in \{n_1,\ldots,n_k\}) = C(k+1)$

? si $q=-1 : ?$?

si $|q|\neq 1$:
$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1-q^{(l+1)n_i}}{1-q^{n_i}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(n \,|\, \text{termes répétés au plus } l \text{ fois} \in \{n_1,\ldots,n_k\}).q^n$$

si $|q|\neq 1, k=1$:
$$\frac{1-q^{(l+1)n_1}}{1-q^{n_1}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(n \,|\, \text{termes répétés au plus } l \text{ fois} \in \{n_1\}).q^n$$

si $|q|<1, l=\infty$: $\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-q^{n_i}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(n \,|\, \{n_1,\ldots,n_k\}).q^n$

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-q^{i}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(n \,|\, \text{termes} \leqslant k).q^n$$

si $|q|<1, k=1, l=\infty$: $\frac{1}{1-q^{n_1}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(n \,|\, \{n_1\}).q^n$

$$\text{si } |q| < 1, k = l = \infty : \prod_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 - q^i} = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(n).q^n$$

Questions (à résoudre)

? $\boxed{\exists ?f, \forall k \in \mathbb{N}_*, \forall n \in \mathbb{N}+f(k) : \left| \begin{array}{ll} 2\,P(n) & > P(n+k) \\ 2^k\,P(n) & > P(n+1) \end{array} \right.}$?

? $n\,P(n-1) > P(n)$? ?

? $P(n \,|\, n_0 = \cdots = n_{l-1} = K < n_l \leqslant \cdots \leqslant n_{k-1}) = P_{k-l}(n - kK)$? ?

? $\exists ?n \in \mathbb{N}+8, \exists k \in \mathbb{N} :\; P(n) = 2^k - 1$?
? $\exists ?n \in \mathbb{N}+3, \exists k \in \mathbb{N} :\; P(n) = 2^k$?
? $\exists ?n \in \mathbb{N}+5, \exists k \in \mathbb{N} :\; P(n) = 2^k + 1$?
? $\exists ?n \in \mathbb{N}+5, \exists k \in \mathbb{N} :\; P(n) = F_k$?

? $P(2^k - 1) =$?
? $P(2^k) =$?
? $P(2^k + 1) =$?
? $P(F_k) =$?

$(n_1, n_2, \dots, n_k)$ avec $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_k$ est autoconjuguée $\Longrightarrow\; n_1 = k$

? $C^k(n) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{k}{}^{n-1}$ $\qquad P^k(n) =$?

$\mathcal{P}(n) \simeq$ “ $\mathcal{C}(n)/_{\leqslant}$ ”

Idées (à creuser)

Une composition produit de n est une suite de naturels strictement plus grands que 1 dont le produit vaut n. Par ex., $(3, 2, 3)$ est une composition produit de $3.2.3 = 18$.

Une partition produit de n est une composition produit de n ordonnée. Par ex., $(2, 3, 3)$ est une partition produit de $2.3.3 = 18$.

Chutier

? $\boxed{?\ \forall k, n \in \mathbb{N} ? :\; P_{k+1}(n+1) < (k+1)\,P_k(n)}$?

Démonstration
Soit une partition de n de k termes : $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Il y a $k+1$ places où placer un nombre 1 pour former une composition de $n+1$ de $k+1$ termes.
? …? ?

$\square$

Références

[OEIS] **L'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers**[3].
{*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.} 1, 10, 11, 12

[MathWorld] **MathWorld**[4].

[Théorie analytique des nombres] Jean DIEUDONNÉ,
Théorie des nombres - Théorie analytique des nombres.
Encylopædia Universalis[5] 10 PC/Mac, 2004.

[Wikipédia] **Wikipédia**[6], l'encyclopédie libre.

Remerciements

À tous ceux qui contribuent à libérer le savoir.

3. `http://oeis.org/?language=french`
4. `http://mathworld.wolfram.com/`
5. `http://www.universalis.fr/`
6. `http://fr.wikipedia.org/`

Index

Table des matières

$\mathcal{DS}$TEX*tes*

mis en page sous DSTEX
le 2 janvier 2012
http://www.opimedia.be/DS/