“Tu entends ?
Même les corbeaux qui croassent sur les toits s’enquièrent :
« *Qu’est-ce qu’une implication logique ?* »”

(Callimaque, −310 env.−−243 env.)

Abrégé de Logiques Classiques

Olivier Pirson
olivier_pirson_opi@yahoo.fr
http://www.opimedia.be/

mercredi 3 août 2016

Citations en avant-propos

“[...] la mathématique est l’art de donner le même nom à des choses différentes.”

(*Science et méthode* / Henri Poincaré)

“Il doit toujours être possible de substituer “table”, “chaise” et “chope de bière” à “point”, “droite”, “plan” dans un système d’axiomes géométriques.”

(David Hilbert)

“Avec l’introduction des variables, Aristote avait créé la logique formelle ; avec la réduction du raisonnement à un calcul [Leibniz], on accède à une logique formaliste.

[...] Cette définition est la pierre angulaire de l’entreprise logiciste de Frege : c’est elle qui permet de réduire l’induction mathématique, « l’inférence de n à $(n+1)$, qui est apparement propre à la mathématique, aux lois générales de la logique. »

[...] C’est surtout l’axiome de l’infini qui pose problème ; Russell et Whitehead conviennent d’un commun accord qu’il ne fait pas partie des principes logiques. Selon cette perspective, la frontière entre la logique et la mathématique ne serait pas celle qui sépare les objets logiques (propositions, fonctions propositionnelles) des ensembles, mais celle qui sépare le fini de l’infini.”

[Histoire de la logique]

1 Langage formel

Un langage L est la donnée :

- d'un vocabulaire $\mathcal{A}$, ce sont les mots de L ;
- d'une collection $\mathcal{F}$, ce sont les phrases de L, c.-à-d. les suites finies de mots (grammaticalement correctes). La morphologie de L constitue les règles de formation de $\mathcal{F}$;
- d'une collection $\mathcal{D}$, ce sont les textes de L, c.-à-d. les suites finies de phrases (cohérentes). La syntaxe de L constitue les règles de formation de $\mathcal{D}$.

La sémantique de L constitue les règles de correspondance entre les éléments de L (mots, phrases, textes) et les aspects de la réalité (objets, faits, enchaînement de faits).

Un langage L est appelé langage objet alors que le langage utilisé pour l'exprimer (suposé "transparent") est appelé métalangage (ou métalangue).

Un langage formel L est la donnée :

- d'un ensemble $\mathcal{A}$ non vide, son alphabet (ou vocabulaire, ensemble des symboles) ;
- d'un ensemble $\mathcal{F}$ de formules (ou expressions bien formées) inclus dans l'ensemble des suites finies d'éléments de $\mathcal{A}$;
- d'un ensemble $\mathcal{D}$ de démonstrations (ou preuves, dérivations, inférences) inclus dans l'ensemble des suites finies d'éléments de $\mathcal{F}$.

Un système formel est la donnée d'un alphabet $\mathcal{A}$ et des règles de formation de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{D}$. *En pratique, les termes « système » et « langage » (formel) sont interchangeables.* [1]

"[. . .] les langages formels donnent lieu à deux approches distinctes, quoique complémentaires, l'une privilégiant la syntaxe, l'autre la sémantique. [. . .] La logique tire néanmoins sa force, dans une large mesure, précisément de la convergence des deux approches. La possibilité d'une convergence dépend de la coïncidence plus ou moins grande entres les « faits » ou « vérités » syntaxiques que sont les formules démontrables dans le système formel, d'une part, et les faits ou vérités sémantiques que sont les formules vérifiées dans la ou les structures interprétatives, d'autre part. Quand la coïncidence est parfaite, on dit que le langage (ou le système) formel est complet." [1]

1. [Logique mathématique]

2 Calcul propositionnel (ou calcul des propositions)

"Le calcul propositionnel constitue un système formel rudimentaire, si pauve qu'aucune théorie mathématique sérieuse ne peut y être formalisée."[2]

Soit l'ensemble infini dénombrable $\mathcal{P}$ des variables propositionnelles,
désignées par $p, q, r, \ldots$

Soit S, le langage formel défini ci-dessous. Il s'agit du calcul propositionnel construit sur $\mathcal{P}$.

2.1 Morphologie (construction des formules)

Soient les deux[3] symboles différents des variables propositionnelles appelés connecteurs : $\neg$ le connecteur unaire de négation
$\rightarrow$ le connecteur binaire d'implication[4]

Soit l'alphabet $\mathcal{A} := \mathcal{P} \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}$

Soient les formules (désignées par les méta-variables $A, B, C, \ldots$), qui sont les suites finies non vides d'éléments de $\mathcal{A}$ construites par itération des trois règles de formation :

- les suites d'un seul élément $\in \mathcal{P}$ sont des formules ; p
- si A est une formule alors $(\neg A)$ aussi ; $(\neg A)$
- si A et B sont des formules alors $(A \rightarrow B)$ aussi. $(A \rightarrow B)$

Par exemple, p, q, $(\neg p)$, $(p \rightarrow (\neg p))$ et $((\neg(q \rightarrow p)) \longrightarrow (\neg q))$ sont des formules. Par contre, pp, $\neg p$, $(\neg A)$, $(p\neg)$, $(p \rightarrow)$ et $(\rightarrow p)$ ne sont *pas* des formules.[5]

Soit $\mathcal{F}$, l'ensemble des formules.
$\mathcal{F}$ est fermé pour les connecteurs $\neg$ et $\rightarrow$.[6]

$A = B$ signifie que A et B représentent la même formule (le *même* élément de $\mathcal{F}$).

2. [Logique mathématique]
3. C'est le système de Frege. Hilbert et Ackermann partent plutôt de $\neg, \vee$; Rosser de $\neg, \wedge$; Kleene de $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$; ...
4. Appelée implication matérielle. Parfois noté $\Rightarrow$ ou $\supset$.
5. Étant convenu le sens de lecture gauche droite et les priorités suivantes $\neg, |, \downarrow, \wedge, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow$, on évitera les parenthèses superflues. Habituellement les logiciens adoptent plutôt la convention : $A \rightarrow B \rightarrow C \;=\; (A \rightarrow (B \rightarrow C))$.
Pour améliorer la lecture on utilisera également $[]$, $\{\}$ à la place de $()$.
6. Par ex., $\mathcal{F}$ est fermé pour $\rightarrow \overset{\triangle}{\iff} \forall A, B \in \mathcal{F} : (A \rightarrow B) \in \mathcal{F}$

"[...] les objets considérés dans un langage formel appellent une triple distinction : ce sont des objets formels, c'est-à-dire des éléments d'un ensemble mathématique (très précisément celui des suites finies de $\mathcal{A}$), qui sont désignés des multiples manières admises des mathématiciens, et interprétés par d'autres objets mathématiques. Il ne s'agit donc pas d'un couple tel que signe / sens ou signifiant / signifié, mais d'une triade objet / désignateur / valeur, ou si l'on veut objet / signe / sens."[7]

2.2 **Syntaxe** (construction des démonstrations)

On appelle axiomes les formules prises comme point de départ, *posées* comme toujours "vraie"[8].

Pour obtenir la logique classique on adopte les schémas d'axiomes suivants[9] (c.-à-d. le sous-ensemble infini de formules, avec $A, B, C \in \mathcal{F}$) :

- $[\alpha]$[10] $A \longrightarrow (B \to A)$ — principe de l'a fortiori
- $[\beta]$ $[A \to (B \to C)] \longrightarrow [(A \to B) \to (A \to C)]$ — auto-distributivité
- $[\gamma]$[11] $(\neg A \to B) \longrightarrow [(\neg A \to \neg B) \to A]$

Soient les démonstrations (formelles), qui sont les suites finies non vides d'éléments de $\mathcal{F}$ construites par itérations des trois règles de formations :

- les suites d'un seul élément qui est un axiome sont des démonstrations ; (axiome)
- si A est un axiome et $\mathtt{D}$ une démonstration, alors la suite composée par les éléments de $\mathtt{D}$ suivi de A est aussi une démonstration ; (..., axiome)
- si A et B sont des formules et $\mathtt{D}$ une démonstration comportant deux éléments de la forme A et $(A \to B)$, alors la suite composée par les éléments de $\mathtt{D}$ suivi de B est aussi une démonstration. $(\ldots, A, \ldots, A \to B, \ldots, B)$

  On dit alors que B a été inférée dans $\mathtt{D}$ par la règle d'inférence modus ponens[12] [MP] $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ $\qquad \dfrac{\neg A \quad A \vee B}{B}$

Soit $\mathcal{D}$, l'ensemble des démonstrations.

---

7. [Logique mathématique]
8. Cela n'aura de sens que dans la sémantique : dans la syntaxe les formules "ne sont qu'un jeu de symboles".
9. Il existe d'autres axiomatiques, équivalentes. Par ex., Łukasiewicz prend $[\alpha]$, $[\beta]$ et la contraposition inverse $(\neg A \to \neg B) \longrightarrow (B \to A)$.
10. Principe de l'a fortiori (ou a posteriori ?), aussi appelé affaiblissement, conséquence merveilleuse. Est rejeté en logique de la pertinence (*relevance*) et en logique quantique (mais on y accepte $(A \to C) \longrightarrow [B \to (A \to C)]$).
11. Est rejeté en logique intuitionniste.
12. Ou règle de détachement.

Une formule F est appelée théorème (formel) (ou dite démontrable)
si il existe une démonstration dont elle est le dernier élément,
c.-à-d. si $\exists k \in \mathbb{N}, \exists F_1, F_2, \ldots, F_k \in \mathcal{F} : \ (F_1, F_2, \ldots, F_k, F) \in \mathcal{D}$
Dans ce cas on note $\vdash_S F$ (ou simplement $\vdash F$ s'il n'y a aucune ambiguïté), et une telle démonstration est appelée démonstration (formelle) de F (dans S).

$\boxed{A \text{ est un axiome} \Longrightarrow \vdash_S A}$ (les axiomes sont des théorèmes)

$\boxed{\left.\begin{array}{l} \vdash_S A \\ \vdash_S A \to B \end{array}\right| \Longrightarrow \vdash_S B}$ (simple réécriture du [MP])

Théorème formel 1 (identité, $\to$ est une relation réflexive)
$\boxed{\vdash_S A \to A}$[13]

Démonstration formelle

1. $F \longrightarrow (F \to F)$	$[\alpha]$ avec $A = B = F$
2. $F \longrightarrow [(F \to F) \to F]$	$[\alpha]$ avec $\left\lvert \begin{array}{l} A = F \\ B = F \to F \end{array}\right.$
3. $\{F \to [(F \to F) \to F]\} \longrightarrow \{[F \to (F \to F)] \to (F \to F)\}$	$[\beta]$ avec $\left\lvert \begin{array}{l} A = C = F \\ B = F \to F \end{array}\right.$
4. $[F \to (F \to F)] \longrightarrow (F \to F)$	[MP] sur 2 et 3
5. $F \to F$	[MP] sur 1 et 4 $\square$

$\boxed{\vdash_S A \iff \exists D \in \mathcal{D} : \ A \in D}$ (une formule est un théorème ssi elle appartient à une démonstration)

Démonstration

$\Rightarrow$) $\vdash_S A \ \overset{\triangle}{\iff} \ \exists (F_1, F_2, \ldots, F_k, A) \in \mathcal{D}$

$\Leftarrow$) Soit $A \in (F_1, F_2, \ldots, F_k) \in \mathcal{D}$
$(F_1, F_2, \ldots, F_k, A \to (A \to A)) \in \mathcal{D}$ par ajout de l'axiome $[\alpha]$
$(F_1, F_2, \ldots, F_k, A \to (A \to A), A \to A) \in \mathcal{D}$ par [MP]
$(F_1, F_2, \ldots, F_k, A \to (A \to A), A \to A, A) \in \mathcal{D}$ par [MP] $\square$

$\boxed{\vdash_S B \Longrightarrow \vdash_S A \to B}$

Démonstration

$\vdash_S B \ \overset{\triangle}{\iff} \ \exists (F_1, F_2, \ldots, F_k, B) \in \mathcal{D}$
$\Longrightarrow \ (F_1, F_2, \ldots, F_k, B, B \to (A \to B)) \in \mathcal{D}$ par ajout de l'axiome $[\alpha]$
$\Longrightarrow \ (F_1, F_2, \ldots, F_k, B, B \to (A \to B), A \to B) \in \mathcal{D}$ par [MP]
$\Longrightarrow \ \vdash_S A \to B$

$\square$

13. Ce n'est pas à proprement parler un théorème formelle, plutôt une infinité de théorèmes formelles, le schéma des théorèmes formelles : $p \to p$, $q \to q$, …, $\neg p \to \neg p$… De même, la démonstration est plutôt un schéma de démonstrations formelles.

Ce qui donne la règle d'inférence $\boxed{\dfrac{B}{\begin{array}{c}B \to (A \to B)\\ A \to B\end{array}}}$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} k \in \mathbb{N}_* \\ (F_1, F_2, \ldots, F_k, A) \in \mathcal{D} \end{array}\right| \iff \left|\begin{array}{l} (F_1, F_2, \ldots, F_k) \in \mathcal{D} \\ A \text{ est un axiome ou } \exists i \neq j : F_i = (F_j \to A) \end{array}\right.}$$

(Une démonstration privée de son dernier élément reste une démonstration. Les éléments d'une démonstrations sont des axiomes ou sont inférées par [MP].)

Démonstration

$\Rightarrow$) Si A n'est pas un axiome il ne peut être que le résultat d'un [MP] inféré de deux formules F_j et $(F_j \to A) \in \{F_1, F_2, \ldots, F_k\} \in \mathcal{D}$

$\Leftarrow$) Par construction des démonstrations. □

$$\boxed{(F_1, F_2, \ldots, F_k) \in \mathcal{D} \implies \left|\begin{array}{l} F_1 \text{ est un axiome} \\ k \geqslant 2 \;\Rightarrow\; F_2 \text{ est un axiome} \end{array}\right.}$$

(les deux premiers éléments d'une dém. sont des axiomes)

$$\boxed{A \in (F_1, F_2, \ldots, F_k) \in \mathcal{D} \implies (F_1, F_2, \ldots, F_k, A) \in \mathcal{D}}$$

Démonstration

Si $A = F_i$ n'est pas un axiome, il ne peut être que le résultat d'un [MP] inféré de deux formules F_j et $(F_j \to A) \in \{F_1, F_2, \ldots, F_{i-1}\}$, ce qui permet de réappliquer le [MP] : $(F_1, F_2, \ldots, F_k, A) \in \mathcal{D}$ □

Ce qui donne la règle d'inférence $\boxed{\dfrac{A}{A}}$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (A_1, A_2, \ldots, A_k) \in \mathcal{D} \\ (B_1, B_2, \ldots, B_l) \in \mathcal{D} \end{array}\right| \implies (A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_l) \in \mathcal{D}}$$

(deux dém. accolées forment une dém.)

Démonstration

On ajoute les formules B_i les unes après les autres et à chaque étape on obtient une démonstration. □

Si la formule $F \in \mathcal{F}$ est un théorème dans le système formel S' obtenu lorsque l'on ajoute les formules de $\Delta \subseteq \mathcal{F}$ aux axiomes de S, alors on dit que F est une conséquence (formelle) de Δ (dans S). On note $\Delta \vdash_S F$ (ou $\Delta \vdash F$).

C.-à-d. que $\Delta \vdash_S F \overset{\Delta}{\iff} \vdash_{S'} F$

$$\boxed{\begin{array}{rl} \vdash_S A & \iff \forall \Delta \subseteq \mathcal{F} : \; \Delta \vdash_S A \\ & \iff \emptyset \vdash_S A \end{array}}$$

(Un théorème est une formule conséquence de tous les sous-ensemble de formules)

Démonstration

Pour un $\Delta \subseteq \mathcal{F}$ donné, soit $\mathcal{D}'$ l'ensemble des démonstrations du système S' obtenu en ajoutant les formules de Δ aux axiomes de S.

$\Rightarrow$) $\vdash_S A \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \exists(F_1, F_2, \ldots, F_k, A) \in \mathcal{D}$
Or $\forall \Delta \subseteq \mathcal{F} : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$
donc $\exists(F_1, F_2, \ldots, F_k, A) \in \mathcal{D}' \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \vdash_{S'} A \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \Delta \vdash_S A$

$\Leftarrow$) Pour $\Delta = \emptyset$: $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$, donc $\emptyset \vdash_S A \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \vdash_{S'} A \Longleftrightarrow \vdash_S A$ $\square$

$\boxed{A \in \Delta \implies \Delta \vdash_S A}$ En particulier : $\boxed{\{A\} \vdash_S A}$

Théorème de la déduction

$\boxed{\{A\} \vdash_S B \iff \vdash_S A \to B}$ (A a pour conséquence B ssi $A \to B$ est un théorème)

? **Démonstration** ?

$\Rightarrow$) ...

$\Leftarrow$) $\dfrac{\{A\} \vdash_S A \qquad \{A\} \vdash_S A \to B}{\{A\} \vdash_S B}$ $\square$

Plus généralement

$\boxed{\Delta \cup \{A\} \vdash_S B \iff \Delta \vdash_S A \to B}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si} \left| \begin{array}{l} \vdash_S A_1 \\ \vdash_S A_2 \\ \ldots \\ \vdash_S A_k \end{array} \right. \\ \text{alors } \{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash_S B \iff \vdash_S B \end{array}}$$

(Une formule conséquence de théorèmes est un théorème)

Démonstration

$\Rightarrow$) $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash_S B \implies \{A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}\} \vdash_S A_k \to B$ $\square$
Puis $\{A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}\} \vdash_S B$ par [MP], et ainsi de suite

Ce qui permet de considérer les “règles d'inférences”[14] suivantes :

$\overset{?}{\Leftarrow}$ $\boxed{\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash_S B \implies \dfrac{A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_k}{B}}$ $\overset{?}{\Leftarrow}$

Conséquence formelle 1 ($\to$ est une relation transitive)

$\boxed{\{A \to B, B \to C\} \vdash_S A \to C}$

14. Une (vraie) règle d'inférence, à partir d'une démonstration contenant certaines formules, produit une autre démonstration en y ajoutant une formule à la fin. Ici, il faudrait d'abord y insérer des formules intermédiaires.

Démonstration formelle

1. $F \to G$
2. $G \to H$
3. $[F \to (G \to H)] \longrightarrow [(F \to G) \to (F \to H)]$ $\quad$ $[\beta]$ avec $\left| \begin{array}{l} A = F \\ B = G \\ C = H \end{array} \right.$
4. $(G \to H) \longrightarrow [F \to (G \to H)]$ $\quad$ $[\alpha]$ avec $\left| \begin{array}{l} A = G \to H \\ B = F \end{array} \right.$
5. $F \longrightarrow (G \to H)$ $\quad$ [MP] sur 2 et 4
6. $(F \to G) \longrightarrow (F \to H)$ $\quad$ [MP] sur 5 et 3
7. $F \to H$ $\quad$ [MP] sur 1 et 6 $\square$

"Règle d'inférence" modus barbara [MB] $\boxed{\dfrac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}}$

Théorème formel 2

$\boxed{\vdash_S (B \to C) \longrightarrow [(A \to B) \to (A \to C)]}$

Démonstration formelle

1. $(G \to H) \longrightarrow [F \to (G \to H)]$ $\quad$ $[\alpha]$ avec $\left| \begin{array}{l} A = G \to H \\ B = F \end{array} \right.$
2. $[F \to (G \to H)] \longrightarrow [(F \to G) \to (F \to H)]$ $\quad$ $[\beta]$ avec $\left| \begin{array}{l} A = F \\ B = G \\ C = H \end{array} \right.$
3. . . .

_. $(G \to H) \longrightarrow [(F \to G) \to (F \to H)]$ $\quad$ [MB] sur 1 et 2 $\square$

Théorème formel 3

$\boxed{\vdash_S C \longrightarrow [(A \to B) \to (A \to C)]}$

Théorème formel 4

$\boxed{\vdash_S B \longrightarrow [(\neg A \to \neg B) \to A]}$

Démonstration formelle

1. $G \longrightarrow (\neg F \to G)$ $\quad$ $[\alpha]$ avec $\left| \begin{array}{l} A = G \\ B = \neg F \end{array} \right.$
2. $(\neg F \to G) \longrightarrow [(\neg F \to \neg G) \to F]$ $\quad$ $[\gamma]$ avec $\left| \begin{array}{l} A = F \\ B = G \end{array} \right.$
3. . . .

_. $G \longrightarrow [(\neg F \to \neg G) \to F]$ $\quad$ [MB] sur 1 et 2 $\square$

Théorème formel 5 (Élimination de la double négation)

$\boxed{\vdash_S \neg\neg A \to A}$ (Ce qui permet le raisonnement par l'absurde) $\boxed{\vdash_S \neg^{2k} A \to A}$

Démonstration formelle

1. $\neg F \to \neg F$	théor. formel 1 avec $A = \neg F$
2. $(\neg F \to \neg F) \longrightarrow [(\neg F \to \neg\neg F) \to F]$	$[\gamma]$ avec $\left\vert \begin{array}{l} A = F \\ B = \neg F \end{array}\right.$
3. $(\neg F \to \neg\neg F) \longrightarrow F$	[MP] sur 1 et 2
4. $\neg\neg F \longrightarrow (\neg F \to \neg\neg F)$	$[\alpha]$ avec $\left\vert \begin{array}{l} A = \neg\neg F \\ B = \neg F \end{array}\right.$
5. ...	
_. $\neg\neg F \to F$	[MB] sur 4 et 3 $\square$

Théorème formel 6 (Contraposition)

$\boxed{\vdash_S (A \to B) \longrightarrow (\neg B \to \neg A)}$ $\boxed{\vdash_S (A \to B) \longrightarrow (\neg^{2k} B \to \neg^{2k} A)}$

? **Démonstration formelle**

... $\square$?

"Règle d'inférence" modus tollens [MT] $\boxed{\dfrac{A \to B \quad \neg B}{\neg A}}$

$\boxed{\vdash_S F \implies F \text{ est de la forme } A \to B \text{ ou } \neg(A \to B)}$ $\boxed{\nvdash_S p}$ $\boxed{\nvdash_S \neg p}$

$\boxed{\vdash_S A \implies \nvdash_S \neg A}$

$\boxed{\vdash_S A \to \neg\neg A}$

Définissons (comme raccourci syntaxique) les autres connecteurs binaires :

$A \wedge B$	$:= \neg(A \to \neg B)$ $\leftrightarrow (A \to B) \to B$	conjonction (et)
$A \vee B$	$:= \neg A \to B$	disjonction (ou inclusif)
$A \oplus B$	$:= (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ $\leftrightarrow \neg[(\neg A \to B) \to \neg(A \to \neg B)]$	disjonction exclusive (ou exclusif) [15]
$A \leftarrow B$	$:= \neg A \to \neg B$	implication réciproque [16]
$A \leftrightarrow B$	$:= (A \to B) \wedge (B \to A)$ $= \neg[(A \to B) \to \neg(B \to A)]$	double implication [17]
$A \vert B$	$:= \neg(A \wedge B)$ $\leftrightarrow (A \to \neg B)$	incompatibilité (barre de Sheffer) [18]
$A \downarrow B$	$:= \neg(A \vee B)$ $= \neg(\neg A \to B)$	négation conjointe (barre de Sheffer duale) [18]

$\mathcal{F}$ est fermé pour tous ces connecteurs.

15. Parfois noté $\veebar$, $\dot\vee$ ou w.
16. Parfois noté $\Leftarrow$ ou $\subset$.
17. Parfois noté $\Leftrightarrow$.
18. Ce seul connecteur permet d'engendrer tous les autres.

2.3 **Sémantique** (valeur des formules)

[. . .]

p	contradiction 0	affirmation p	négation ¬p	tautologie 1
faux 0	0	0	1	1
vrai 1	0	1	0	1

TABLE 1 – Sémantique des connecteurs unaires

report et + modulo 2				r					+									
multiplication				$\cdot$														
relations				min	$>$		$<$		$\neq$	max		$=$		$\geqslant$		$\leqslant$		
connecteur des négations [19]				$\not\not\downarrow$					$\not\not\oplus$	$\not\not\mid$	$\not\not\wedge$	$\not\not\leftrightarrow$		$\not\not\rightarrow$		$\not\not\leftarrow$	$\not\not\vee$	
négation du connecteur [20]			$\not 1$	$\not\mid$	$\not\rightarrow$		$\not\leftarrow$		$\not\leftrightarrow$	$\not\downarrow$	$\not\vee$	$\not\oplus$	$\not q$		$\not p$		$\not\wedge$	$\not 0$
	p	q	0	$\wedge$		p		q	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$		$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\mid$	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
réflexif ?												✓		✓		✓		✓
symétrique ?			✓	✓					✓	✓	✓	✓					✓	✓
anti-symétrique ?			✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓		
transitif ?			✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓
euclidien ?			✓	✓				✓			✓	✓	✓					✓
associatif ?			✓	✓		✓		✓	✓	✓		✓						✓
élément neutre				1					0	0		1						
élément symétrique de x									x			x						
commutatif ?			✓	✓					✓	✓	✓	✓					✓	✓
élément absorbant			0	0						1								1
idempotent ?				✓		✓		✓		✓								
involution ?									✓			✓						

TABLE 2 – Sémantique des connecteurs binaires

Le calcul propositionnel est vérifonctionnel, c.-à-d. que la vérité d'une formule est entièrement déterminée par la vérité de ses sous-formules.

19. C.-à-d. que, par ex., $A \not\not\oplus B = (\neg A) \oplus (\neg B)$
20. Par ex., $A \not\oplus B = \neg(A \oplus B)$

Si une formule F vaut 1 pour toutes ses assignations on dit que c'est une tautologie. On note $\models_S F$ (ou $\models F$).

Une formule duale notée par une * résulte de la contraposition d'une tautologie puis d'une éventuelle simplification des négations (non définie précisément, ce qui fait que l'on peut généralement considérer plusieurs formules duales pour une formule donnée). Une formule est une tautologie ssi ses duales sont des tautologies.

$[\alpha]^*$ $\quad (A \wedge B) \to A$

$\boxed{\models_S F \implies F \text{ est de la forme } A \to B \text{ ou } \neg(A \to B)}$ $\quad \boxed{\not\models_S p}$ $\quad \boxed{\not\models_S \neg p}$

$\boxed{\models_S F \implies \not\models_S \neg F}$

$\boxed{F \text{ est un axiome} \implies \models_S F}$ $\quad$ (les axiomes sont des tautologies)

Démonstration

$A \longrightarrow$ (	$B \to$	A)
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$A \longrightarrow$ (	B	$\to$	A)
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

A	$\longrightarrow$	(B	$\to$	A)
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

De même pour les deux autres axiomes. $\square$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\models_S A \\ \models_S A \to B\end{array}\right| \implies \models_S B}$$

Démonstration

Soit $\dfrac{A \to B}{1 \quad 1}$, alors $\begin{array}{cc|c|} A & \to & B \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$

$\square$

2.4 Correction

$\boxed{A \in \mathtt{D} \in \mathfrak{D} \implies \models_S A}$ (Une formule appartenant à une démonstration est une tautologie)

Démonstration

Par récurrence sur la longueur k des démonstrations.

Cas de base $k = 1$: $\mathtt{D} = (F_1)$
F_1 est un axiome, donc $\models F_1$

Hypothèse de récurrence k : $\mathtt{D} = (F_1, F_2, \dots, F_k) \implies \models F_1, \models F_2, \dots, \models F_k$

Pour $k+1$? : $\mathtt{D} = (F_1, F_2, \dots, F_k, F_{k+1})$
$(F_1, F_2, \dots, F_k)$ est aussi une démonstration, donc $\models F_1, \models F_2, \dots, \models F_k$.
Si F_{k+1} est un axiome alors $\models F_{k+1}$.
Sinon F_{k+1} a été inféré par [MP] de F_i et $F_j = F_i \to F_{k+1}$, donc $\models F_{k+1}$ $\square$

Correction (*soundness*)

$\boxed{\vdash_S A \implies \vDash_S A}$ (Un théorème est une tautologie)

2.5 Complétude

$\boxed{\vDash_S A \implies \vdash_S A}$ (Une tautologie est un théorème)

chutier calcul propositionnel

$[\gamma']$ $[(A \to \bot) \to \bot] \longrightarrow A$ $(\neg\neg A \longrightarrow A)$

Principe du tiers exclu : $A \vee \neg A$ $\iff \neg A \to \neg A \iff \neg\neg A \to A$

Principe de non-contradiction : $\neg(A \wedge \neg A)$ $\iff \neg\neg(A \to \neg\neg A) \iff \neg\neg(\neg A \to \neg A)$

$[(A \to B) \to A] \longrightarrow A$ loi de Peirce

$[(A \wedge B) \to C] \;\leftrightarrow\; [A \to (B \to C)] \;\leftrightarrow\; [B \to (A \to C)]$

$[(A \to B) \to A] \longleftarrow A$ (par $[\alpha]$)

$\neg(A \vee B) \longrightarrow \neg A \wedge \neg B$ loi de De Morgan (1)

$\neg(A \wedge B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$ loi de De Morgan (2)

$\neg(A \to B) \longrightarrow A \wedge \neg B$

$\neg(A \leftarrow B) \longrightarrow \neg A \wedge B$

$\boxed{[A \longrightarrow (B \to C)] \;\leftrightarrow\; [B \longrightarrow (A \to C)]}$

$\boxed{[(A \to B) \longrightarrow A] \;\longrightarrow\; [(A \to B) \longrightarrow B]}$ $[(A \to B) \longrightarrow A] \;\longrightarrow\; A$ (Peirce)

$A \;\longrightarrow\; [(A \to B) \longrightarrow B]$ (th. 4 et 6)

Soient les deux formules constantes :

$\top := p \to p$ vrai

$= \neg p \vee p$

$\bot := \neg \top$ faux (absurde)

$= \neg(p \to p)$

$= p \wedge \neg p$

$A \longrightarrow \top$ $\boxed{\vdash_S \top}$ $\boxed{\vdash_S A \iff \{\top\} \vdash_S A}$

$\bot \longrightarrow A$ $\boxed{\vdash_S \bot \iff \forall A : \vdash_S A}$ $\boxed{\{\bot\} \vdash_S A}$

$[(A \to B) \to C] \longrightarrow \{[(B \to A) \to C] \to C\}$

$p \;\leftrightarrow\; p \wedge \top \;\leftrightarrow\; p \vee \bot$

$p \;\leftrightarrow\; \neg p \to \bot \;\longrightarrow\; \neg(p \wedge \top)$

$$\frac{\top \quad \top \longrightarrow (A \to \top)}{A \to \top}$$

$(\top \to A) \longleftrightarrow A$ $(\neg A \to A) \longleftrightarrow A$

$(A \to \bot) \longleftrightarrow \neg A$ $(A \to \neg A) \longleftrightarrow \neg A$

Raisonnement par l'absurde (*reductio ad absurdum*) : $\boxed{\{\neg A\} \vdash_S \bot \implies \vdash_S A}$

$$\boxed{\{A\} \vdash_S \bot \quad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \quad \vdash_S \neg A}$$

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B} \qquad\qquad \frac{A}{A \vee B}$$

Connecteur ternaire :

$$\begin{aligned}
(C \mathbin{?} A : B) &\overset{\triangle}{\longleftrightarrow} [(C \wedge A) \vee (\neg C \wedge B)] \qquad\qquad (\texttt{if } C \texttt{ then } A \texttt{ else } B)\\
&\longleftrightarrow [(C \mid A) \mid (\neg C \mid B)] \longleftrightarrow \neg [(\neg C \downarrow \neg A) \downarrow (C \downarrow \neg B)]
\end{aligned}$$

$$(\neg C \mathbin{?} A : B) \longleftrightarrow (C \mathbin{?} B : A)$$

$$\begin{aligned}
&\neg A \longleftrightarrow (A \mathbin{?} 0 : 1)\\
&(A \vee B) \longleftrightarrow (A \mathbin{?} A : B) \longleftrightarrow (A \mathbin{?} 1 : B)\\
&(A \wedge B) \longleftrightarrow (B \mathbin{?} A : B) \longleftrightarrow (B \mathbin{?} A : 0)\\
&(A \rightarrow B) \longleftrightarrow (A \mathbin{?} B : \neg A) \longleftrightarrow (A \mathbin{?} B : 1)\\
&(A \downarrow B) \longleftrightarrow (A \mathbin{?} \neg A : \neg B) \longleftrightarrow (A \mathbin{?} 0 : \neg B)\\
&(A \mid B) \longleftrightarrow (B \mathbin{?} \neg A : \neg B) \longleftrightarrow (B \mathbin{?} \neg A : 1)
\end{aligned}$$

3 Logiques modales

La logique modale est une extension de la logique propositionnelle classique. On dispose de l'alphabet :

$$\top, \bot, \quad p, q, r, \dots, \quad \neg, \Box, \Diamond, \quad \wedge, \vee, \to, \quad (,)$$

pour chaque élément d'un ensemble W non vide,

avec
- les éléments de W notés $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sont appelés mondes ;
- $\top$ et $\bot$ sont des constantes propositionnelles
  représentant le vrai et le faux dans chaque monde ;
- $\mathcal{P} = \{p, q, r, \dots\}$, l'ensemble des variables propositionnelles ;
- $\neg$ est le connecteur unaire de négation ;
- $\wedge, \vee, \to$ sont les connecteurs binaires de conjonction,
  de disjonction et d'implication.
- $\Box$, $\Diamond$ sont des connecteurs unaires
  qui exprimeront les notions de nécessité et de possibilité ;

Seules les logiques pour lesquelles $\left|\begin{array}{l} \Box = \neg\Diamond\neg \\ \Diamond = \neg\Box\neg \end{array}\right.$ seront envisagées.

$\Box A = \neg\Diamond\neg A = \neg\Diamond(A \to \bot)$

$\Diamond A = \neg\Box\neg A = \neg\Box(A \to \bot)$

$\Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$

$\Box(A \vee B) \leftarrow \Box A \vee \Box B$

$\Box(A \to B)$? $\Box A \to \Box B$

$\Box(A \leftrightarrow B)$? $\Box A \leftrightarrow \Box B$

$\Diamond(A \wedge B) \to \Diamond A \wedge \Diamond B$ $\qquad$ $(\Diamond A \to \Box B) \to \Box(A \to B)$

$\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow \Diamond A \vee \Diamond B$

$\Diamond(A \to B)$? $\Diamond A \to \Diamond B$

$\Diamond(A \leftrightarrow B)$? $\Diamond A \leftrightarrow \Diamond B$

$\Box A$ $\neg\Diamond\neg A$ nécessaire	$\neg\Diamond A$ $\Box\neg A$ impossible
$\Diamond A$ $\neg\Box\neg A$ possible	$\neg\Box A$ $\Diamond\neg A$ contingent

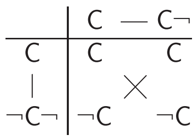


FIGURE 1 – Carré aristétolicien

Modalités	$\Box$ $\Diamond$	$\Box\neg$ $\Diamond\neg$
classiques (ou aléthiques)	nécessaire possible	impossible contingent
de la prouvabilité formelle [21]	démontrable consistant	inconsistant indémontrable
déontiques [22]	obligatoire permis (et il y a un volontaire)	interdit facultatif
des quantificateurs	$\forall = \neg\exists\neg$ $\neg\forall\neg = \exists$	$\forall\neg = \neg\exists$ $\neg\forall = \exists\neg$
spatiales	partout quelque part	nulle part
temporelles	toujours un jour	jamais pas toujours
de la connaissance [23]	savoir ~ plausible, imaginable	~ inimaginable ignorance
de la croyance [24]	croire ~ consistance de sa croyance	douter
(?)	savoir, vérité (vrai $\forall$) on-dit, opinion ($\exists$ personne)	non-dit on-nie

Table 3 – Tableau des modalités

"Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir."[25]

L'ensemble des formules (que l'on note $A, B, C, \dots$) est généré par application finie des règles :

- $\top, \bot, p, q, r, \dots$ sont des formules dites atomiques ;
- si A est une formule, alors $(\neg A), (\Box A), (\Diamond A)$ sont des formules ;
- si A et B sont des formules, alors $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ sont des formules.

On dit qu'une formule est composée ssi elle n'est pas atomique.

On dit que $\alpha \in W$ vérifie la formule A (ou que α force A)
ssi A est vraie dans α. On note $\alpha \Vdash A$.

21. L'obligation n'entraîne pas forcément la vérité : $\Box A \rightarrow A$ n'est pas une tautologie.
22. $\nexists$ formule A : $\Box A \rightarrow \neg A$
23. $\Box A \rightarrow A$
Si *sachable* alors *connaissable* : $\Box A \rightarrow \Box\Box A$.
24. On peut croire du faux (se tromper, rêver) : $\Box A \rightarrow A$ n'est pas une tautologie.
25. *La Science et l'hypothèse* (Henri Poincaré)

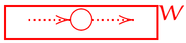
3.1 Sémantique de Leibniz

[...]

3.2 Sémantique de Kripke

On introduit une relation d'accessibilité qui fait que tous les mondes ne sont plus forcément accessibles.

On appelle référentiel (ou multivers, frame) $(W, \mathcal{R})$, la donnée d'un ensemble W non vide et d'une relation $\mathcal{R}$ définie sur W appelée relation d'accessibilité.



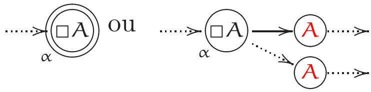
Les éléments de W sont appelés mondes (ou états, situations, worlds) et notés par les lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ $\alpha \mathcal{R} \beta$ se lit α accède à β.

On appelle antiréférentiel (ou antimultivers, référentiel dual) de $(W, \mathcal{R})$,
le référentiel $(W, \mathcal{R}')$ tel que $\forall \alpha, \beta \in W : \ \alpha \mathcal{R}' \beta \iff \alpha \not{\mathcal{R}} \beta$.

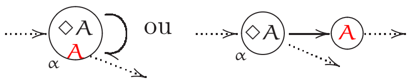
Sémantique de Kripke : $\forall \alpha \in W, \forall$ formule A :

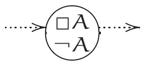
- α obéit à la logique classique

- $\alpha \Vdash \Box A \overset{\triangle}{\iff} \forall \beta \in W : \ \alpha \mathcal{R} \beta \implies \beta \Vdash A$



- $\alpha \Vdash \Diamond A \overset{\triangle}{\iff} \exists \beta \in W : \left| \begin{array}{l} \alpha \mathcal{R} \beta \\ \beta \Vdash A \end{array} \right.$



On peut donc avoir  .

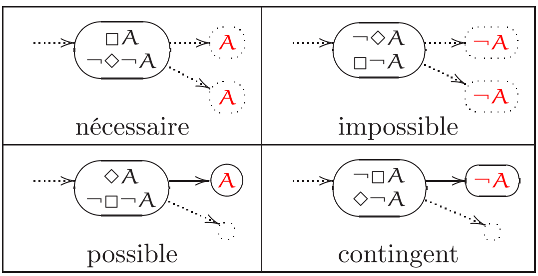


Figure 2 – Carré aristétolicien pour la sémantique de Kripke

$\triangle,\triangledown \quad = \boxdot, \diamondsuit \qquad (\overset{?}{\simeq}\ \overline{\exists},\overline{\forall}$: *Pastout* de LACAN)

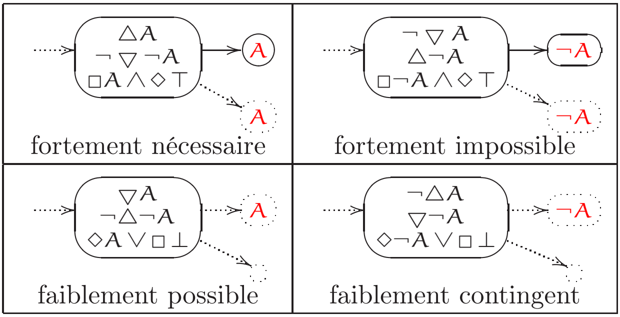


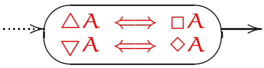
FIGURE 3 – “Second carré aristétolicien” pour la sémantique de KRIPKE

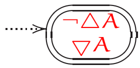
$$\begin{array}{lllll}
\triangle A \iff \Box A\wedge\Diamond\top \iff \Box A\wedge\Diamond A \iff \triangle A\wedge\triangledown A & \Longrightarrow & \Box A \iff \triangle A\vee\Box\bot \\
\triangledown A \iff \Diamond A\vee\Box\bot \iff \Diamond A\vee\Box A \iff \triangledown A\vee\triangle A & \Longleftarrow & \Diamond A \iff \triangledown A\wedge\Diamond\top
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\triangle(A\wedge B) & \iff & \triangle A\wedge\triangle B \\
\triangle(A\vee B) & \Longleftarrow & \triangle A\vee\triangle B \\
\triangle(A\to B) & ? & \triangle A\to\triangle B \\
\triangle(A\leftrightarrow B) & ? & \triangle A\leftrightarrow\triangle B \\
\triangledown(A\wedge B) & \Longrightarrow & \triangledown A\wedge\triangledown B \\
\triangledown(A\vee B) & \iff & \triangledown A\vee\triangledown B \\
\triangledown(A\to B) & ? & \triangledown A\to\triangledown B \\
\triangledown(A\leftrightarrow B) & ? & \triangledown A\leftrightarrow\triangledown B
\end{array}$$

$$\triangle A \Longrightarrow \left|\begin{array}{ll} \Box A & \Longrightarrow \\ \Downarrow \text{ssi } (W,\mathcal{R}) \text{ est idéal} & \\ \Diamond A & \Longrightarrow \end{array}\right| \triangledown A$$

$$\begin{array}{lcl}
\triangle\top & \iff & \Diamond\top \\
\triangledown\bot & \iff & \Box\bot
\end{array}$$

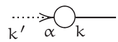




3.2.1 Taxinomie des mondes

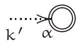
$\alpha\in W$ est dit transitoire (ou monde vivant) ssi $\exists\beta\in W:\ \alpha\,\mathcal{R}\,\beta$;

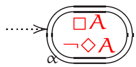
$$\begin{array}{l}
\iff \exists A\in\mathcal{F}:\ \alpha\nVdash\Box A \iff \alpha\Vdash\Diamond\top \\
\iff \exists A\in\mathcal{F}:\ \alpha\nVdash\neg\Diamond A \iff \alpha\Vdash\triangle\top
\end{array}$$



$\alpha\in W$ est dit terminal (ou monde mort, dernier monde, trou noir)

$$\begin{array}{l}
\overset{\triangle}{\iff} \alpha \text{ n'est pas transitoire} \\
\iff \forall A\in\mathcal{F}:\ \alpha\Vdash\Box A \iff \alpha\Vdash\Box\bot \\
\iff \forall A\in\mathcal{F}:\ \alpha\Vdash\neg\Diamond A \iff \alpha\Vdash\triangledown\bot
\end{array}$$

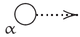




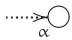
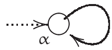
(Dans un monde terminal, tout est nécessaire (même le faux, $\Box\bot$), mais rien n'est possible ! Situation catastrophique d'une personne qui ayant sauté d'un avion, arrive à un mètre du sol sans avoir ouvert son parachute !)

“7. Sur ce dont on ne peut parler, il faut garder le silence.”
(*Tractatus logico-philosophicus*, Ludwig WITTGENSTEIN)

« Y'a pas de mot pour décrire ce danger-là. »
(*ABCédaire, à la lettre W comme Wittgenstein*, Gilles DELEUZE)

$\alpha \in W$ est dit originel (ou premier monde) ssi $\nexists \beta \in W : \ \beta \, \mathcal{R} \, \alpha$ 

$\alpha \in W$ est dit presque terminal ssi $\forall \beta \in W : \ \alpha \, \mathcal{R} \, \beta \implies \alpha = \beta$

 ou 

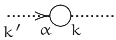
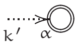
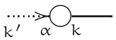
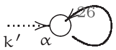
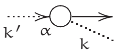
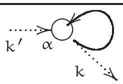
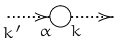
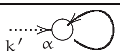
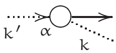
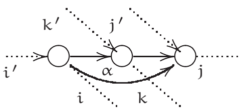
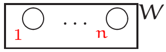
Représentations	Propriétés	Formules toujours vraie	
		$\implies \alpha \Vdash \Box \top$ $\iff \alpha \Vdash \neg \Diamond \bot$	
	α terminal $\iff$ α non transitoire $\iff$ α presque terminal et irréflexif	$\iff \alpha \Vdash \Box \bot \iff \alpha \Vdash \Box p$ $\iff \alpha \Vdash \neg \Diamond \top \iff \alpha \Vdash \neg \Diamond p$	
	α transitoire	$\implies \alpha \Vdash \neg \Box \bot$ $\iff \alpha \Vdash \Diamond \top$	
	α presque terminal $\iff$ α terminal ou uniquement réflexif	$\iff \alpha \Vdash$ [triv [27]] $p \to \Box p$ $\iff \alpha \Vdash$ [triv*] $\Diamond p \to p$	$+1\Box$ $-1\Diamond$
	α non presque terminal		
	α réflexif $\implies$ α transitoire	$\iff \alpha \Vdash$ [T [28]] $\Box p \to p$ $\iff \alpha \Vdash$ [T*] $p \to \Diamond p$	$-1\Box$ $+1\Diamond$
	α irréflexif		
	α uniquement réflexif $\implies$ α symétrique et transitif	$\iff \alpha \Vdash p \leftrightarrow \Box p$ $\iff \alpha \Vdash \Diamond p \leftrightarrow p$	$\pm 1\Box$ $\mp 1\Diamond$
	α non uniquement réflexif		
	α transitif	$\iff \alpha \Vdash$ [4] $\Box p \to \Box\Box p$ $\iff \alpha \Vdash$ [4] $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$	$+1\Box$ $-1\Diamond$

FIGURE 4 – Récapitulatif de la taxinomie des mondes

26. La boucle devrait être en pointillé.
27. Formule [triv] pour trivial, car elle donne généralement des logiques triviales.
28. Formule de réflexion, formule de FEYS - VON WRIGHT.

3.2.2 Taxinomie des référentiels

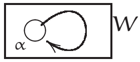
On dit que $(W, \mathcal{R})$ est fini ssi W est fini.



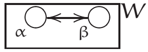
On dit que $(W, \mathcal{R})$ est infini dénombrable ssi W est infini dénombrable.

On dit que $(W, \mathcal{R})$ est infini indénombrable ssi W est infini indénombrable.

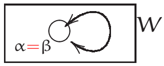
On dit que $(W, \mathcal{R})$ est réflexif ssi $\mathcal{R}$ est réflexive dans W
c.-à-d. ssi $\forall \alpha \in W : \ \alpha \, \mathcal{R} \, \alpha$



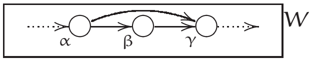
On dit que $(W, \mathcal{R})$ est symétrique ssi $\mathcal{R}$ est symétrique dans W
c.-à-d. ssi $\forall \alpha, \beta \in W : \ \alpha \, \mathcal{R} \, \beta \iff \beta \, \mathcal{R} \, \alpha$



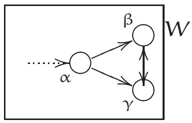
On dit que $(W, \mathcal{R})$ est antisymétrique ssi $\mathcal{R}$ est antisymétrique dans W
c.-à-d. ssi $\forall \alpha, \beta \in W : \left.\begin{array}{r} \alpha \, \mathcal{R} \, \beta \\ \beta \, \mathcal{R} \, \alpha \end{array}\right| \implies \alpha = \beta$



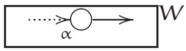
On dit que $(W, \mathcal{R})$ est transitif ssi $\mathcal{R}$ est transitif dans W
c.-à-d. ssi $\forall \alpha, \beta, \gamma \in W : \left.\begin{array}{r} \alpha \, \mathcal{R} \, \beta \\ \beta \, \mathcal{R} \, \gamma \end{array}\right| \implies \alpha \, \mathcal{R} \, \gamma$



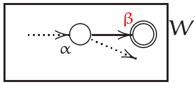
On dit que $(W, \mathcal{R})$ est euclidien ssi $\mathcal{R}$ est euclidienne dans W
c.-à-d. ssi $\forall \alpha, \beta, \gamma \in W : \left.\begin{array}{r} \alpha \, \mathcal{R} \, \beta \\ \alpha \, \mathcal{R} \, \gamma \end{array}\right| \implies \beta \, \mathcal{R} \, \gamma \quad \left(\begin{array}{c} \text{donc} \\ \gamma \, \mathcal{R} \, \beta \end{array}\right)$



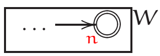
On dit que $(W, \mathcal{R})$ est idéal ssi $\forall \alpha \in W : \ \alpha$ est transitoire.
(Référentiel dans lequel on ne sait pas “mourir”.)
(Dans un référentiel fini idéal, il existe forcément un cycle.)
$\iff$ $\mathcal{R}$ est une relation partout définie



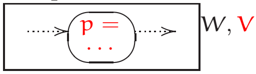
On dit que $(W, \mathcal{R})$ est humble (ou réaliste, terminal, dangereux, mortel) ssi
$\forall \alpha \in W : \ \alpha$ est transitoire $\implies \exists \beta \in W : \left| \begin{array}{l} \beta \text{ est terminal} \\ \alpha \, \mathcal{R} \, \beta \end{array}\right.$
(Référentiel dans lequel on sait “mourir” à chaque instant.)



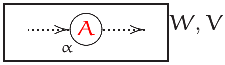
On dit que $(W, \mathcal{R})$ est bien-chapeauté (well-capped, ou létal) ssi
il n'existe pas de suite infinie de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \in W$ telle que $\alpha \, \mathcal{R} \, \beta \, \mathcal{R} \, \gamma \, \mathcal{R} \ldots$
(Référentiel dans lequel on “meurt” toujours, après un temps fini.)
$\implies$ $(W, \mathcal{R})$ est irréfléxif



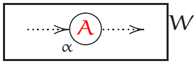
On appelle modèle $(W, \mathcal{R}, V)$, le référentiel $(W, \mathcal{R})$ muni d'une fonction $V :$ $W \times \mathcal{P} \longrightarrow 2$ définissant une valuation booléenne pour chaque monde.



On dit que $(W, \mathcal{R}, V)$ valide (ou satisfait) la formule A
ssi $\forall \alpha \in W :\ \alpha \Vdash A$.
On note $(W, \mathcal{R}, V) \vDash A$.



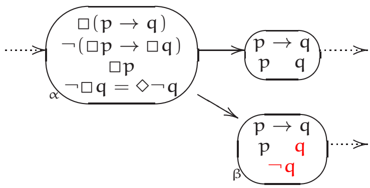
On dit que $(W, \mathcal{R})$ respecte la formule A
ssi $\forall$ valuation $V :\ (W, \mathcal{R}, V) \vDash A$.



$$\begin{array}{|l|}\hline \vDash [\mathrm{K}^{29}]\ \ \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \\ \qquad\quad = [\Box(p \to q) \wedge \Box p] \to \Box q \\ \vDash [\mathrm{K}^*]\ \ (\Box p\ \wedge\ \Diamond q) \to \Diamond(p\ \wedge\ q) \\ \qquad\quad = \Diamond q \to [\Diamond(p \wedge q) \vee \Diamond\neg p] \\ \hline \end{array}$$

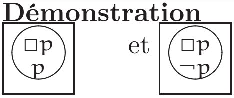
Démonstration
Si $\alpha \in W$ est terminal alors $\forall$ formule $A :\ \alpha \Vdash \Box A$, donc $\alpha \Vdash [\mathrm{K}]$.
Sinon α est transitoire : supposons $\alpha \Vdash \neg[\mathrm{K}]$

$$\begin{array}{ll}
\iff & \alpha \Vdash \Box(p \to q)\ \wedge\ \neg(\Box p \to \Box q) \\
\iff & \alpha \Vdash \Box(p \to q)\ \wedge\ \Box p\ \wedge\ \neg\Box q \\
\iff & \alpha \Vdash \Box(p \to q)\ \wedge\ \Box p\ \wedge\ \Diamond\neg q \\
\iff & \left| \begin{array}{l} \forall \beta \in W :\ \alpha \mathcal{R} \beta \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \beta \Vdash p \to q \\ \beta \Vdash p \end{array} \right. \\ \qquad\qquad\qquad\quad \Longrightarrow \beta \Vdash q \\ \exists \beta \in W :\ \left| \begin{array}{l} \alpha \mathcal{R} \beta \\ \beta \Vdash \neg q \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\Longrightarrow & \exists \beta \in W :\ \beta \Vdash q \wedge \neg q \quad \text{K.-O.}
\end{array}$$



□

$\boxed{\text{La logique modale n'est pas vérifonctionnelle.}}$
Démonstration



□

3.2.3 Équivalences

$$\begin{array}{|lcl|}\hline (W, \mathcal{R}) \text{ respecte } [\mathrm{triv}]\ p \to \Box p & \iff & \text{tous les mondes de } (W, \mathcal{R}) \\ \qquad\qquad\qquad\ [\mathrm{triv}^*]\ \Diamond p \to p & & \qquad \text{sont presque terminaux} \\ & \Longrightarrow & \left| \begin{array}{l} [4]\ \Box p \to \Box\Box p \\ \Diamond p \to \Box p \end{array} \right. \\ \hline \end{array}$$

29. Formule de Kripke.

Démonstration

$\Leftarrow$) Si $\alpha \in W$ est terminal alors $\forall$ formule $A :\ \alpha \Vdash \Box A$, donc $\alpha \Vdash$ [triv].
Sinon α est seul le monde accesible à partir de α,
donc $\alpha \Vdash p \iff \alpha \Vdash \Box p$ et $\alpha \Vdash$ [triv].

$\Rightarrow$) Supposons $\exists \alpha \neq \beta \in W :\ \alpha \,\mathcal{R}\, \beta$.
Soit la valuation V telle que $\alpha \Vdash p$ et $\beta \Vdash \neg p$.
Alors, on a $\alpha \Vdash \Box p$ par [triv], puis $\beta \Vdash p$. K.-O. $\square$

$$\boxed{\begin{array}{llcl} (W,\mathcal{R}) \text{ respecte } [\mathrm{T}] & \Box p \to p & \iff & (W,\mathcal{R}) \text{ est réfléxif} \\ & [\mathrm{T}^*]\ p \to \Diamond p & \Longrightarrow & [\mathrm{D}]\ \Box p \to \Diamond p \end{array}}$$

Démonstration

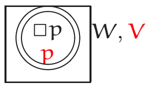
$\Leftarrow$) $\forall \alpha \in W$:
Si $\alpha \Vdash \neg\Box p$ alors $\alpha \Vdash \Box p \to p$
Et si $\alpha \Vdash \Box p$ alors $\forall \beta \in W :\ \alpha \,\mathcal{R}\, \beta \Longrightarrow \beta \Vdash p$

$$\overset{\alpha \mathcal{R} \alpha}{\Longrightarrow} \alpha \Vdash p \Longrightarrow \alpha \Vdash \Box p \to p$$

$\Rightarrow$) Supposons $(W,\mathcal{R})$ non réflexif, c.-à-d. que $\exists \alpha \in W :\ \alpha \,\not\mathcal{R}\, \alpha$
Soit la valuation V telle que $\left| \begin{array}{l} \alpha \Vdash \neg p \\ \forall \beta \in W :\ \alpha \neq \beta \Longrightarrow \beta \Vdash p \end{array} \right.$

$\overset{\alpha \not\mathcal{R} \alpha}{\Longrightarrow} \alpha \Vdash \Box p$ K.-O. $\square$

Il existe malgré tout des modèles avec $\mathcal{R}$ non réflexive qui valident la formule $\Box p \to p$.



$$\boxed{\begin{array}{llcl} (W,\mathcal{R}) \text{ respecte } [4] & \Box p \to \Box\Box p & \iff & (W,\mathcal{R}) \text{ est transitif} \\ & [4^*]\ \Diamond\Diamond p \to \Diamond p & \iff & \forall m \geqslant n \geqslant 1 :\ \Box^n p \to \Box^m p \\ & & \iff & \forall m \geqslant n \geqslant 1 :\ \Diamond^m p \to \Diamond^n p \end{array}}$$

Démonstration

$\Leftarrow$) Si $\alpha \in W$ est terminal alors $\forall$ formule $A :\ \alpha \Vdash \neg\Diamond A$, donc $\alpha \Vdash [4^*]$.
Sinon α est transitoire : supposons $\alpha \Vdash \neg[4^*]$

$$\iff \alpha \Vdash \Diamond\Diamond p \ \wedge\ \neg\Diamond p$$
$$\iff \alpha \Vdash \Diamond\Diamond p \ \wedge\ \Box\neg p$$
$$\iff \left| \begin{array}{l} \exists \beta \in W : \left| \begin{array}{l} \alpha \,\mathcal{R}\, \beta \\ \beta \Vdash \Diamond p \iff \exists \gamma \in W : \left| \begin{array}{l} \beta \,\mathcal{R}\, \gamma \\ \gamma \Vdash p \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \forall \gamma \in W :\ \alpha \,\mathcal{R}\, \gamma \Longrightarrow \gamma \Vdash \neg p \end{array} \right.$$
$$\overset{\alpha \mathcal{R} \gamma}{\Longrightarrow} \exists \gamma \in W :\ \gamma \Vdash p \ \wedge\ \neg p \quad \text{K.-O.}$$

$\Rightarrow$) Supposons $(W,\mathcal{R})$ non transitif, c.-à-d. que $\exists \alpha, \beta, \gamma \in W : \left| \begin{array}{l} \alpha \,\mathcal{R}\, \beta \\ \beta \,\mathcal{R}\, \gamma \\ \alpha \,\not\mathcal{R}\, \gamma \end{array} \right.$

Soit la valuation V telle que $\left|\begin{array}{l}\gamma \Vdash \neg p \\ \forall \delta \in W: \ \delta \neq \gamma \Longrightarrow \delta \Vdash p\end{array}\right.$

$\overset{\alpha \mathcal{R} \gamma}{\Longrightarrow} \alpha \Vdash \Box p$ donc $\alpha \Vdash \Box\Box p$

D'où $\beta \Vdash \Box p$ et $\gamma \Vdash p$ K.-O. $\square$

$$\boxed{\begin{array}{l}(W, \mathcal{R}) \text{ respecte } [\text{B}\,^{30}] \ p \to \Box\Diamond p \iff (W, \mathcal{R}) \text{ est symétrique} \\ \qquad\qquad\qquad\quad [\text{B}^*] \ \Diamond\Box p \to p\end{array}}$$

Démonstration

$\Leftarrow$) Si $\alpha \in W$ est terminal alors $\forall$ formule A : $\alpha \Vdash \Box A$, donc $\alpha \Vdash [\text{B}]$.

Sinon α est transitoire : supposons $\alpha \Vdash \neg[\text{B}]$

$\iff \alpha \Vdash p \ \wedge \ \neg\Box\Diamond p$

$\iff \alpha \Vdash p \ \wedge \ \Diamond\Box\neg p$

$\iff \left|\begin{array}{l}\alpha \Vdash p \\ \exists \beta \in W: \left|\begin{array}{l}\alpha \mathcal{R} \beta \\ \beta \Vdash \Box\neg p \iff \forall \gamma \in W: \ \beta \mathcal{R} \gamma \Longrightarrow \gamma \Vdash \neg p\end{array}\right.\end{array}\right.$

$\overset{\beta \mathcal{R} \alpha}{\Longrightarrow} \alpha \Vdash p \wedge \neg p$ K.-O.

$\Rightarrow$) Supposons $(W, \mathcal{R})$ est non symétrique, c.-à-d. que $\exists \beta \in W: \left|\begin{array}{l}\alpha \mathcal{R} \beta \\ \beta \not\mathcal{R} \alpha\end{array}\right.$

Soit la valuation V telle que $\left|\begin{array}{l}\alpha \Vdash p \\ \forall \gamma \in W: \ \beta \mathcal{R} \gamma \Longrightarrow \gamma \Vdash \neg p\end{array}\right.$

$\alpha \Vdash \Box\Diamond p$

$\beta \Vdash \Diamond p$

$\gamma \Vdash p$ K.-O. $\square$

$$\boxed{\begin{array}{lll}(W, \mathcal{R}) \text{ respecte } [\text{D}\,^{31}] \ \Box p \to \Diamond p & \iff & (W, \mathcal{R}) \text{ est idéal} \\ & \iff & \mathcal{R} \text{ est une relation partout définie} \\ & \iff & (W, \mathcal{R}) \text{ respecte } \Diamond \top\end{array}}$$

Démonstration

$\Leftarrow$) Supposons $\alpha \in W$ tel que $\alpha \Vdash \neg[\text{D}]$

$\iff \alpha \Vdash \Box p \ \wedge \ \neg\Diamond p$

$\iff \alpha \Vdash \Box p \ \wedge \ \Box\neg p$

$\iff \forall \beta \in W: \ \alpha \mathcal{R} \beta \Longrightarrow \ \beta \Vdash p \wedge \neg p$

$\overset{\alpha \text{ transitoire}}{\Longrightarrow} \exists \beta \in W: \ \beta \Vdash p \wedge \neg p$ K.-O.

$\Rightarrow$) Supposons α terminal. On a : $\left|\begin{array}{l}\alpha \Vdash \Box p \\ \alpha \Vdash \neg\Diamond p \quad \text{K.-O.}\end{array}\right.$ $\square$

$$\boxed{(W, \mathcal{R}) \text{ respecte } \Diamond p \to \Box p \iff \mathcal{R} \text{ est une fonction}}$$

30. Pour Brouwer.
31. Formule déontique (ce qui est obligatoire est permis).

$$\boxed{(W,\mathcal{R}) \text{ respecte } \nabla p \to \triangle p \iff \mathcal{R} \text{ est une application}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (W,\mathcal{R}) \text{ respecte } [5]\ \Diamond p \to \Box\Diamond p \quad \iff (W,\mathcal{R}) \text{ est euclidien} \\ \qquad\qquad\qquad\quad [5^*]\ \Diamond\Box p \to \Box p \end{array}}$$

Démonstration

$\Leftarrow$) Si $\alpha \in W$ est terminal alors $\forall$ formule A : $\alpha \Vdash \Box A$, donc $\alpha \Vdash [5]$.

Sinon α est transitoire : supposons $\alpha \Vdash \neg[5]$

$$\begin{array}{l} \iff \alpha \Vdash \Diamond p \ \wedge \ \neg\Box\Diamond p \\ \iff \alpha \Vdash \Diamond p \ \wedge \ \Diamond\Box\neg p \\ \iff \left| \begin{array}{l} \exists\beta \in W : \left| \begin{array}{l} \alpha\,\mathcal{R}\,\beta \\ \beta \Vdash p \end{array} \right. \\ \exists\gamma \in W : \left| \begin{array}{l} \alpha\,\mathcal{R}\,\gamma \\ \gamma \Vdash \Box\neg p \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \overset{\gamma\,\mathcal{R}\,\beta}{\Longrightarrow} \exists\beta \in W :\ \beta \Vdash p \wedge \neg p \quad \text{K.-O.} \end{array}$$

$\Rightarrow$) ... $\Box$

$$\boxed{\begin{array}{l} (W,\mathcal{R}) \text{ respecte } [C\,^{32}]\ \Diamond p \to \neg\Box\Diamond p \iff (W,\mathcal{R}) \text{ est humble} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \Diamond p \to \Diamond\Box\neg p \\ \qquad\qquad\qquad\quad [C^*]\ \neg\Diamond\Box p \to \Box p \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \Box\Diamond\neg p \to \Box p \\ \qquad\qquad\qquad\quad \Box\Diamond p \to \neg\Diamond p \end{array}}$$

Démonstration

$\Leftarrow$) Si $\alpha \in W$ est terminal alors $\forall$ formule A : $\alpha \Vdash \neg\Diamond A$, donc $\alpha \Vdash [C]$.

Sinon α est transitoire : supposons $\alpha \Vdash \neg[C] \iff \alpha \Vdash \Diamond p \ \wedge \ \Box\Diamond p$

$$\exists\beta \in W : \left| \begin{array}{ll} \alpha\,\mathcal{R}\,\beta & \Longrightarrow \beta \Vdash \Diamond p \\ \beta \text{ est terminal} & \Longrightarrow \beta \Vdash \neg\Diamond p \quad \text{K.-O.} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$) ... $\Box$

$$\boxed{\begin{array}{l} (W,\mathcal{R}) \text{ respecte} \left| \begin{array}{l} [L\,^{33}]\ \Box(\Box p \to p) \to \Box p \\ [L^*]\ \Diamond p \to \neg\Box(p \to \Diamond p) \end{array} \right. \\ \iff (W,\mathcal{R}) \text{ est transitif et bien-chapeauté} \end{array}}$$

$\Box[T] \to \Box p$
$\Diamond p \to \neg\Box[T^*]$

Démonstration

... $\Box$

32. Conscience (Donne la plus petite “théorie de la vie et de la mort”.) (Fausse dans la sémantique de Leibniz.)
33. Formule de Löb.

$(W, \mathcal{R})$ respecte [Grz [34]] $\Box[\Box(p \to \Box p) \to p] \to p$ [Grz*] $p \to \Diamond[\Box(\Diamond p \to p) \wedge p]$ $\iff$ $(W, \mathcal{R})$ est fini, réfléxif, antisymétrique et transitif   c.-à-d. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans W fini.

$\Box[\Box[\text{triv}] \to p] \to p$

Démonstration

... $\Box$

chutier logiques modales

~ Soit une machine arithmétique de Peano. On crois tout ce qu'elle dit.
$\Box p$ signifie la machine prouve p.
[4] $\Box p \to \Box\Box p$.
La machine est introspective :
si elle prouve A, un jour elle prouvera qu'elle a prouvé A.
$\Box p \wedge \Box(p \to q) \to \Box q$

~ Plaçons la machine sur l'île des preux (qui disent toujours la vérité) et des valets (qui ne disent jamais la vérité). Que dire des affirmations de la machine :

- Je suis un preux.
- Je suis un valet.
- Tu ne sauras jamais que je suis un preux.
- Tu ne sauras jamais que je suis un valet.

~ Répondre à la question : « Est-ce que je peux trouver un trésor sur l'île ? »

- Si je suis un preux, tu vas trouver un trésor sur l'île.
- Si tu crois que je suis un preux, tu vas trouver un trésor sur l'île.

Tous les référentiels valident la règle d'inférence [MP] $\dfrac{p \quad p \to q}{q}$

Démonstration

$\forall$ valuation V, $\forall \alpha \in W$ tel que $\alpha \Vdash p \wedge (p \to q)$: $\alpha \Vdash q$ $\Box$

Commentaire personnel

Que signifie validé pour une règle (ce n'est pas une formule) ?

Tous les référentiels valident la règle d'inférence de nécessitation [NEC] $\dfrac{p}{\Box p}$

Démonstration

Si $\alpha \in W$ est terminal alors $\alpha \Vdash \Box p$. Sinon... $\Box$

34. Formule de Grzegorczyk.

On dit qu'une théorie est normale ssi elle possède au-moins [K] comme axiome et est fermée pour [MP] et [NEC]. C.-à-d. qu'elle admet une sémantique de Kripke.

4) Utiliser [K], [MP] et [NEC] pour démontrer la "correctitude" (soundness) des théories normales K, KT, KTB, KT4, KT45, KD, KD4, KC, KC4, K4L, KT4Grz dans les référentiels correspondants.

5) Essayer d'énoncer un théroème d'incomplétude correspondant.

A) Dériver [T] dans [K]+[Grz] (donc avec [MP] et [NEC]). (facile)

$\boxed{[K], [Grz] \vdash [T]}$

Démonstration formelle

1. $p \to [\Box(p \to \Box p) \to p]$	$[\alpha]$ avec $\left\vert \begin{array}{l} A = p \\ B = \Box(p \to \Box p) \end{array}\right.$
2. $\Box\{p \to [\Box(p \to \Box p) \to p]\}$	[NEC] sur 1
3. $\Box\{p \to [\Box(p \to \Box p) \to p]\}$ $\to \{\Box p \to \Box[\Box(p \to \Box p) \to p]\}$	[K] sur 2
4. $\Box p \to \Box[\Box(p \to \Box p) \to p]$	[MP] sur 2 et 3
5. $\Box p \to p$	[MB] sur 4 et [Grz] $\Box$

B) Dériver [4] dans [K]+[L]. (plus difficile)

C) Dériver [4] dans [K]+[Grz]. (vraiment difficile)

$\boxed{[K] \vdash \Box p \to \Box(\Box p \to p)}$

Démonstration formelle

1. $p \to (\Box p \to p)$	$[\alpha]$ avec $\left\vert \begin{array}{l} A = p \\ B = \Box p \end{array}\right.$
2. $\Box[p \to (\Box p \to p)]$	[NEC] sur 1
3. $\Box[p \to (\Box p \to p)] \to [\Box p \to \Box(\Box p \to p)]$	[K] sur 2
4. $\Box p \to \Box(\Box p \to p)$	[MP] sur 2 et 3 $\Box$

4 Annexes

4.1 Quelques propriétés des relations

Soient $\left|\begin{array}{l}\text{l'ensemble } E \\ \text{la relation } \mathcal{R} \text{ sur l'ensemble } E\end{array}\right.$

$\mathcal{R}$ est dite réflexive ssi $\forall x \in E : \ x \,\mathcal{R}\, x$

$\mathcal{R}$ est dite symétrique ssi $\forall x, y \in E : \ x \,\mathcal{R}\, y \Longrightarrow y \,\mathcal{R}\, x$

$\mathcal{R}$ est dite antisymétrique ssi $\forall x, y \in E : \ \left.\begin{array}{r} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{R}\, x \end{array}\right| \Longrightarrow x = y$

$\mathcal{R}$ est dite transitive ssi $\forall x, y, z \in E : \ \left.\begin{array}{r} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{R}\, z \end{array}\right| \Longrightarrow x \,\mathcal{R}\, z$

$\mathcal{R}$ est dite euclidienne ssi $\forall x, y, z \in E : \ \left.\begin{array}{r} x \,\mathcal{R}\, y \\ x \,\mathcal{R}\, z \end{array}\right| \Longrightarrow y \,\mathcal{R}\, z \quad$ (et aussi $z \,\mathcal{R}\, y$)

$\mathcal{R}$ est appelée relation de préordre ssi $\mathcal{R}$ est réflexive et transitive.
$\mathcal{R}$ est appelée relation d'ordre ssi $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
$\mathcal{R}$ est appelée relation d'équivalence
ssi $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive
ssi $\mathcal{R}$ est réflexive et euclidienne.

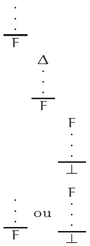
4.2 Quelques propriétés des opérations

Soient $\left|\begin{array}{l}\text{l'ensemble } E \\ \text{l'opération binaire } * : E \times E \longrightarrow E\end{array}\right.$

$*$ est dite associative ssi $\forall x, y, z \in E : \ (x * y) * z = x * (y * z)$
$e \in E$ est dit neutre pour $*$ ssi $\forall x \in E : \ x * e = x = e * x$
$*$ est dite symétrisable ssi $\forall x \in E, \exists x' \in E : \ x * x' = \text{neutre} = x' * x$
$*$ est dite commutative ssi $\forall x, y \in E : \ x * y = y * x$
$a \in E$ est dit absorbant pour $*$ ssi $\forall x \in E : \ x * a = a = a * x$
$*$ est dite idempotente ssi $\forall x \in E : \ x * x = x$
$*$ est dite involution ssi $\forall x \in E : \ x * x = \text{neutre}$

4.3 Résumé des concepts

4.3.1 Syntaxe



F est un théorème de $\mathcal{T}$ $\overset{\triangle}{\iff}$ $\vdash_{\mathcal{T}} F$ $\overset{\triangle}{\iff}$ $\exists$ démonstration de F dans $\mathcal{T}$

F est conséquence de Δ dans $\mathcal{T}$ $\overset{\triangle}{\iff}$ $\Delta \vdash_{\mathcal{T}} F$ $\overset{\triangle}{\iff}$ $\vdash_{\mathcal{T}+\Delta} F$

F est réfutable dans $\mathcal{T}$ $\overset{\triangle}{\iff}$ $F \vdash_{\mathcal{T}} \perp$ $\overset{?}{\iff}$ $\vdash_{\mathcal{T}} \neg F$

F est décidable dans $\mathcal{T}$ $\overset{\triangle}{\iff}$ F est démontrable ou réfutable dans $\mathcal{T}$

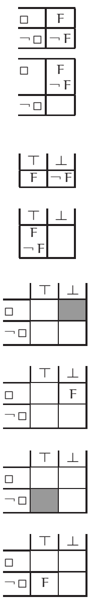
F est indécidable dans $\mathcal{T}$ $\overset{\triangle}{\iff}$ F est | indémontrable dans $\mathcal{T}$ | non réfutable dans $\mathcal{T}$

4.3.2 Sémantique

F F est vraie dans $\mathcal{T}$ $\overset{\triangle}{\iff}$ $\models_{\mathcal{T}} F$

¬F F est fausse dans $\mathcal{T}$ $\overset{\triangle}{\iff}$ $\models_{\mathcal{T}} \neg F$

4.3.3 Théorie



$\mathcal{T}$ est ... $\overset{\triangle}{\iff}$ $\forall F : \vdash_{\mathcal{T}} F \Longrightarrow \nvdash_{\mathcal{T}} \neg F$

$\mathcal{T}$ est ... $\overset{\triangle}{\iff}$ $\exists F :$ | $\vdash_{\mathcal{T}} F$ | $\vdash_{\mathcal{T}} \neg F$

$\mathcal{T}$ est consistante $\overset{\triangle}{\iff}$ $\forall F : \models_{\mathcal{T}} F \Longrightarrow \nvDash_{\mathcal{T}} \neg F$

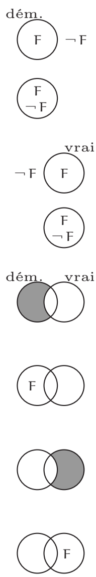
$\mathcal{T}$ est contradictoire $\overset{\triangle}{\iff}$ $\exists F :$ | $\models_{\mathcal{T}} F$ | $\models_{\mathcal{T}} \neg F$ $\iff$ $\mathcal{T}$ est non consistante

$\mathcal{T}$ est correcte $\overset{\triangle}{\iff}$ $\forall F : \vdash_{\mathcal{T}} F \Longrightarrow \models_{\mathcal{T}} F$ [T] $\Box F \to F$

$\mathcal{T}$ est incorrecte $\overset{\triangle}{\iff}$ $\exists F :$ | $\vdash_{\mathcal{T}} F$ | $\nvDash_{\mathcal{T}} F$

$\mathcal{T}$ est complète $\overset{\triangle}{\iff}$ $\forall F : \models_{\mathcal{T}} F \Longrightarrow \vdash_{\mathcal{T}} F$ [triv] $F \to \Box F$

$\mathcal{T}$ est incomplète $\overset{\triangle}{\iff}$ $\exists F :$ | $\models_{\mathcal{T}} F$ | $\nvdash_{\mathcal{T}} F$



4.4 Résumé des règles d'inférences

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$ modus ponens [MP]

$$\frac{B}{A \to B}$$

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$$ modus barbara [MB]

$$\frac{A \to B \quad \neg B}{\neg A}$$ modus tollens [MT]

$$\frac{p}{\Box p}$$ nécessitation [NEC]

$$\frac{p}{\Diamond p}$$ possibilitation [POS]

4.5 Résumé des formules

$A \longrightarrow (B \to A)$ a fortiori (ou a posteriori ?) [α]

$[A \to (B \to C)] \longrightarrow [(A \to B) \to (A \to C)]$ [β]

$(\neg A \to B) \longrightarrow [(\neg A \to \neg B) \to A]$ [γ]

$(A \to B) \longrightarrow (\neg B \to \neg A)$ contraposition

$[(A \to B) \to A] \longrightarrow A$ loi de Peirce

$\neg(A \vee B) \longrightarrow \neg A \wedge \neg B$ loi de De Morgan (1)

$\neg(A \wedge B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$ loi de De Morgan (2)

$\Box A = \neg\Diamond\neg A$

$\Diamond A = \neg\Box\neg A$

$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ de Kripke [K]

$A \to \Box A$ [triv]

$\Box A \to A$ de réflexion, de Feys - von Wright [T]

$\Box A \to \Box\Box A$ [4]

$A \to \Box\Diamond A$ de Brouwer [B]

$\Box A \to \Diamond A$ déontique [D]

$\Diamond A \to \Box\Diamond A$ [5]

$\Diamond A \to \neg\Box\Diamond A$ [C]

$\Box(\Box A \to A) \to \Box A$ de Löb [L]

$\Box\,[\Box(A \to \Box A) \to A] \to A$ de Grzegorczyk [Grz]

Commentaire personnel

$\triangle A = \neg \triangledown \neg A$
$\triangledown A = \neg \triangle \neg A$

$\triangle A \longrightarrow \Box A$

$\Box A \longrightarrow \triangledown A$

chutier général

"**apodictique** adj. (gr. *apodeiktikos*, propre à convaincre). Philos. D'une évidence irréfutable, absolue (par opp. à *problématique*, *assertorique*).
assertorique adj. (du lat. *asserere*, affirmer). Philos. *Jugement assertorique*, qui énonce une vérité de fait, sans la poser comme nécessaire. (S'oppose à *jugement apodictique*.)
aléthique adj. Log. Se dit d'une proposition ou d'une modalité qui ne concerne que le vrai, le faux et l'indéterminé (par opp. à *déontique*).
déontique adj. Log. *Logique déontique :* étude systématique des propriétés formelles vérifiées par des notions juridiques comme celles de droit et d'obligation (par opp. à *aléthique*)."

(*Le petit Larousse en couleurs*. 1990)

"Ce que Kripke tente de définir dans cette analyse, c'est que l'a priori et le nécessaire ne sont pas forcément de même nature et que l'on peut trouver des vérités a priori contingentes et des vérités nécessaires a posteriori."

(*Web sémantique : De Saül Kripke à Google*[35], Karl Dubost)

On dit qu'une formule A est "introspective" ssi ... ?
Si A, B sont "introspectives" alors $A \wedge B$ est "introspective" ?
Si A est "introspective" alors $\neg A$?

Super monde ? $\underset{\alpha}{\boxed{\begin{array}{c}\neg\Box A\\ \Diamond A\end{array}}}$ monde anormal de Kripke

Soit C un connecteur unaire.

$\mathsf{C}^0 A := A$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathsf{C}^{n+1} := \mathsf{C}\mathsf{C}^n = \mathsf{C}^n\mathsf{C} \qquad \forall n \in -\mathbb{N} : \mathsf{C}^{n-1} := \mathsf{C}^{-1}\mathsf{C}^n = \mathsf{C}^n\mathsf{C}^{-1}$$

$$\Longrightarrow \mathsf{C}^1 = \mathsf{C}$$

35. http://www.la-grange.net/2003/10/05.html

Références

[CPC] Bruno Marchal,
Annexe A. Logique modale in
Calculabilité, Physique et Cognition [36].
Thèse soutenue à L'Université des Sciences et Technologies de Lille, 2 juin 1998.

[Histoire de la logique] Robert Blanché, Jan Sebestik,
Histoire de la logique.
Encylopædia Universalis [37] 10 PC/Mac, 2004. 1

[Introduction démonstration] René David, Karim Nour, Christophe Raffalli,
Introduction à la logique : Théorie de la démonstration. Cours et exercices corrigés.
Éd. Dunod [38], Paris, 2003, deuxième édition.

[Introduction sciences humaines] Bruno Marchal [39],
Introduction à la logique pour les sciences humaines (et exactes).
Cours donné à l'IRIDIA, Bruxelles, 2005 – 2006.

[La logique] Jean Largeault,
La logique.
Col. Que sais-je ? [40], Presses Universitaire de France, Paris, 1998, 2e éd.

[Art de raisonner] Yannis Delmas-Rigoutsos, René Lalement,
La Logique ou l'Art de raisonner.
Col. Quatre à Quatre, Le Pommier - Fayard, 2000.

[Les chemins] collectif,
Les chemins de la logique.
Pour la Science [41], Paris, HS 49, octobre/décembre 2005.

[Logique mathématique] Roger Martin, Daniel Andler,
Logique mathématique.
Encylopædia Universalis 10 PC/Mac, 2004. 2, 3, 4

[Mathematics Genealogy] **The Mathematics Genealogy Project** [42].

[Wikipédia] **Wikipédia** [43], l'encyclopédie libre.

36. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/lillethesis/CPC.pdf
37. http://www.universalis.fr/
38. http://www.dunod.com/
39. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/
40. http://www.quesais-je.com/
41. http://www.pourlascience.com/
42. http://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/
43. http://fr.wikipedia.org/

Liste des logiciens cités

~ −385 – −322 : Aristote

1646 – 1716 : Gottfried Wilhelm Leibniz

1806 – 1871 : Augustus De Morgan

1839 – 1914 : Charles Sanders Peirce

1848 – 1925 : Gottlob Frege

1858 – 1932 : Giuseppe Peano

1861 – 1947 : Alfred North Whitehead

1862 – 1943 : David Hilbert

1872 – 1970 : Bertrand Russell

1878 – 1956 : Jan Łukasiewicz

1881 – 1966 : Luitzen Brouwer

1882 – 1964 : Henry Maurice Sheffer

1889 – 1951 : Ludwig Wittgenstein

1889 – 1961 : Robert Feys

1896 – 1962 : Wilhelm Ackermann

1907 – 1989 : John Barkley Rosser

1909 – 1994 : Stephen Cole Kleene

1916 – 2003 : Georg Henrik von Wright

1921 – 2006 : Martin Hugo Löb

1940 – 1996 : George Stephen Boolos

1940 – : Saül Kripke

1955 – : Bruno Marchal

? – : Andrzej Grzegorczyk 1950, 1964, 1967

Liste des tableaux

Liste des figures

Index

Table des matières

TEXtes

mis en page sous DSTEX
le 3 août 2016
http://www.opimedia.be/DS/