Pirson
Olivier

5e GB

T.L.P. de math. 7h

F R A C T I O N S CONTINUES

et approximations de nombres irrationnels

Institut Saint-Joseph
Saint-Hubert

1992 – 1993

Pirson
Olivier

5^e GB

T.L.P. de math. 7h

F R A C T I O N S CONTINUES

et approximations de nombres irrationnels

Institut Saint-Joseph
Saint-Hubert

1992 – 1993

… La mathématique parle des *approximations*, … elle en parle même énormément, mais… elle en parle *avec rigueur*.

On pourrait même dire que c'est la tâche principale de la mathématique depuis ses origines, et que c'est le moteur le plus puissant de toute son histoire.

"Parler avec rigueur de ce qui est approximatif", la formule semble paradoxale. C'est en effet une sorte de *défi* présenté à l'activité intelligente de l'homme :

- d'une part l'exigence de certitude et de rigueur ;
- d'autre par l'inaccessibilité de cette perfection.

G. Th. Guilbaud
Leçons d'À-peu-près
Christian Bourgois, 1985

Table des matières

À propos de ce document

Ce document est la version électronique de mon *travail de longue préparation* de 5e secondaire, travail manuscrit de juin 1993.

Olivier Pirson
olivier_pirson_opi@yahoo.fr
http://www.opimedia.be/
samedi 3 octobre 2008

Introduction

Nous allons premièrement aborder quelques exemples, pour en arriver à l'élaboration de l'algorithme d'Euclide. Ensuite nous définirons les notions de fraction continue, réduite, valeur d'une fraction continue, conversion d'un réel positif en fraction continue et démontrerons les théorèmes qui s'y rapportent.

Pour les personnes intéressées par la vie des mathématiciens célèbres, les astérisques * renvoient à la bibliographie de ceux qui sont cités dans ce travail.

Mais avant de débuter, qu'il me soit permis de remercier M. G. Sinon, professeur à l'Institut Saint-Joseph de Saint-Hubert, pour les documents qu'il m'a fournis et pour son aide qui s'est avérée précieuse.

Olivier Pirson

I Étude empirique

1 Racines d'équations du second degré

1 Premier exemple : le procédé s'arrête

- Soit E, l'équation $6x^2 + 5x - 6 = 0$
  à laquelle on associe la fonction $f : x \mapsto 6x^2 + 5x - 6$;
  $f(0) = -6$ et $f(1) = 5$.
  f étant continue sur [0;1], le théorème des valeurs intermédiaires nous apprend que l'équation E admet une racine x comprise entre 0 et 1.
  0 *est la partie entière de* x,
  c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.
  On pose $x = \frac{1}{x_1}$, on a alors : $0 < \frac{1}{x_1} < 1$, donc $x_1 > 1$.
  $6x^2 + 5x - 6 = 0$
  $\iff \frac{6}{x_1^2} + \frac{5}{x_1} - 6 = 0$
  $\iff 6 + 5x_1 - 6x_1^2 = 0$
  $\iff 6x_1^2 - 5x_1 - 6 = 0$

- Soit E_1, l'équation $6x^2 - 5x - 6 = 0$
  à laquelle on associe la fonction $f_1 : x \mapsto 6x^2 - 5x - 6$;
  $f_1(1) = -5$ et $f_1(2) = 8$.
  Donc l'équation E_1 admet une racine x_1 comprise entre 1 et 2.
  1 *est la partie entière de* x_1.
  On pose $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$, on a alors : $0 < \frac{1}{x_2} < 1$ donc $x_2 > 1$.
  $6x_1^2 - 5x_1 - 6 = 0$
  $\iff 6\left(1 + \frac{1}{x_2}\right)^2 - 5\left(1 + \frac{1}{x_2}\right) - 6 = 0$
  $\iff \cancel{6} + \frac{12}{x_2} + \frac{6}{x_2^2} - 5 - \frac{5}{x_2} \cancel{-6} = 0$
  $\iff 12x_2 + 6 - 5x_2^2 - 5x_2 = 0$
  $\iff -5x_2^2 + 7x_2 + 6 = 0$
  $\iff 5x_2^2 - 7x_2 - 6 = 0$

- Soit E_2, l'équation $5x^2 - 7x - 6 = 0$
  à laquelle on associe la fonction $f_2 : x \mapsto 5x^2 - 7x - 6$;
  $f_2(2) = 0$.
  Donc 2 *est racine de* E_2 et *le procédé s'arrête car la racine trouvée est un nombre entier.*

- Conséquence : 2 est racine de E_2, donc $1 + \frac{1}{2}$ est racine de E_1,

  et par conséquent $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ est racine de E.

  La solution positive de E est un *nombre rationnel*.

2 Deuxième exemple : le procédé ne s'arrête pas

- Soit E, l'équation $x^2 - 2x - 2 = 0$
  à laquelle on associe la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x - 2$;
  $f(2) = -2$ et $f(3) = 1$.
  Donc l'équation E admet une racine x comprise entre 2 et 3.
  2 *est la partie entière de* x.
  On pose $x = 2 + \frac{1}{x_1}$, donc $x_1 > 1$.
  $x^2 - 2x - 2 = 0$
  $\iff \left(2 + \frac{1}{x_1}\right)^2 - 2\left(2 + \frac{1}{x_1}\right) - 2 = 0$
  $\iff \cancel{4} + \frac{4}{x_1} + \frac{1}{x_1^2} \cancel{-4} - \frac{2}{x_1} - 2 = 0$
  $\iff 4x_1 + 1 - 2x_1 - 2x_1^2 = 0$
  $\iff -2x_1^2 + 2x_1 + 1 = 0$
  $\iff 2x_1^2 - 2x_1 - 1 = 0$

- Soit E_1, l'équation $2x^2 - 2x - 1 = 0$
  à laquelle on associe la fonction $f_1 : x \mapsto 2x^2 - 2x - 1$;
  $f_1(1) = -1$ et $f_1(2) = 3$.
  Donc l'équation E_1 admet une racine x_1 comprise entre 1 et 2.
  1 *est la partie entière de* x_1.
  On pose $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$, donc $x_2 > 1$.
  $2x_1^2 - 2x_1 - 1 = 0$
  $\iff 2\left(1 + \frac{1}{x_2}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{x_2}\right) - 1 = 0$
  $\iff \cancel{2} + \frac{4}{x_2} + \frac{2}{x_2^2} \cancel{-2} - \frac{2}{x_2} - 1 = 0$
  $\iff 4x_2 + 2 - 2x_2 - x_2^2 = 0$
  $\iff -x_2^2 + 2x_2 + 2 = 0$
  $\iff x_2^2 - 2x_2 - 2 = 0$

- E_2 est donc l'équation E initiale : par conséquent, *le procédé ne s'arrête pas ; il se répète indéfiniment.*
- Conséquence : si x est la racine positive de E_2,
  alors $1 + \frac{1}{x}$ est racine de E_1,
  donc $2 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ est la racine positive de E.

- Conclusion : la racine positive de E vérifie $x = 2 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}$

  donc elle vérifie $x = 2 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}$ et ainsi de suite.

3 Troisième exemple : le procédé ne s'arrête pas

- Soit E, l'équation $x^2 - 30 = 0$
  à laquelle on associe la fonction $f : x \mapsto x^2 - 30$;
  $f(5) = -5$ et $f(6) = 6$.
  Donc l'équation E admet une racine x comprise entre 5 et 6.
  5 *est la partie entière de* x.
  On pose $x = 5 + \frac{1}{x_1}$, donc $x_1 > 1$.
  $x^2 - 30 = 0$
  $\iff \left(5 + \frac{1}{x_1}\right)^2 - 30 = 0$
  $\iff 25 + \frac{10}{x_1} + \frac{1}{x_1^2} - 30 = 0$
  $\iff 25x_1^2 + 10x_1 + 1 - 30x_1^2 = 0$
  $\iff -5x_1^2 + 10x_1 + 1 = 0$
  $\iff 5x_1^2 - 10x_1 - 1 = 0$

- Soit E_1, l'équation $5x^2 - 10x - 1 = 0$
  à laquelle on associe la fonction $f_1 : x \mapsto 5x^2 - 10x - 1$;
  $f_1(2) = -1$ et $f_1(3) = 14$.
  Donc l'équation E_1 admet une racine x_1 comprise entre 2 et 3.
  2 *est la partie entière de* x_1.
  On pose $x_1 = 2 + \frac{1}{x_2}$, donc $x_2 > 1$.
  $5x_1^2 - 10x_1 - 1 = 0$
  $\iff 5\left(2 + \frac{1}{x_2}\right)^2 - 10\left(2 + \frac{1}{x_2}\right) - 1 = 0$
  $\iff \cancel{20} + \frac{20}{x_2} + \frac{5}{x_2^2} \cancel{-20} - \frac{10}{x_2} - 1 = 0$
  $\iff 20x_2 + 5 - 10x_2 - x_2^2 = 0$
  $\iff -x_2^2 + 10x_2 + 5 = 0$
  $\iff x_2^2 - 10x_2 - 5 = 0$

- Soit E_2, l'équation $x^2 - 10x - 5 = 0$
  à laquelle on associe la fonction $f_2 : x \mapsto x^2 - 10x - 5$;
  $f_2(10) = -5$ et $f_2(11) = 6$.
  Donc l'équation E_2 admet une racine x_2 comprise entre 10 et 11.
  10 *est la partie entière de* x_2.
  On pose $x_2 = 10 + \frac{1}{x_3}$, donc $x_3 > 1$.
  $x_2^2 - 10x_2 - 5 = 0$
  $\iff \left(10 + \frac{1}{x_3}\right)^2 - 10\left(10 + \frac{1}{x_3}\right) - 5 = 0$
  $\iff \cancel{100} + \frac{20}{x_3} + \frac{1}{x_3^2} \cancel{-100} - \frac{10}{x_3} - 5 = 0$
  $\iff 20x_3 + 1 - 10x_3 - 5x_3^2 = 0$
  $\iff -5x_3^2 + 10x_3 + 1 = 0$

$\iff \; 5x_3^2 - 10x_3 - 1 = 0$

- E_2 est donc l'équation E_1 : par conséquent, *le procédé ne s'arrête pas ; il se répète indéfiniment.*
- Conséquence : si x_1 est la racine positive de E_3,
  alors $10 + \frac{1}{x_1}$ est racine de E_2,
  donc $2 + \dfrac{1}{10 + \frac{1}{x_1}}$ est racine de E_1.
- Conclusion : la racine positive de E_1 vérifie $x_1 = 2 + \dfrac{1}{10 + \frac{1}{x_1}}$
  donc elle vérifie $x_1 = 2 + \dfrac{1}{10 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{10 + \frac{1}{x_1}}}}$ et ainsi de suite.
  D'où la racine positive de E est

$$x = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{\cdots + \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{\cdots}}}}}}}}$$

4 Examen du procédé

Soit E, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $\left|\begin{array}{l} a, b \in \mathbb{Z} \\ ac < 0. \end{array}\right.$

Cette équation admet 2 racines x_1 et x_2 de signes contraires.
En effet :

- $\left.\begin{array}{l} ac < 0 \Rightarrow -4ac > 0 \\ b^2 \geqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho = b^2 - 4ac > 0$
  Il y a donc 2 racines x_1 et x_2
  tel que $x_{\frac{1}{2}} = \frac{-b \pm \sqrt{\rho}}{2a}$
- On sait que $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$
  or $ac < 0$
  donc $\frac{c}{a} < 0$
  On a donc que $x_1 x_2 < 0$; ces 2 racines sont de signes contraires.

- On suppose que la racine positive de E n'est pas un entier.
  Soit e sa partie entière.
  On pose $x = e + \frac{1}{y}$, on a alors : $0 < \frac{1}{y} < 1$, donc $y > 1$.

Et on transforme E :
$ax^2 + bx + c = 0$

$\iff a\left(e + \frac{1}{y}\right)^2 + b\left(e + \frac{1}{y}\right) + c = 0$

$\iff ae^2 + \frac{2ae}{y} + \frac{a}{y^2} + be + \frac{b}{y} + c = 0$

$\iff ae^2y^2 + 2aey + a + bey^2 + by + cy^2 = 0$

$\iff (ae^2 + be + c)y^2 + (2ae + b)y + a = 0$

Cette nouvelle équation, E_1*, possède les mêmes caractéristiques que* E :

- ses coefficients sont entiers
- à l'aide des 2 graphes suivants, on montre que $(ae^2 + be + c)a < 0$:
  $ax^2 + bx + c$ admet 2 racines de signes contraires et est du signe de a en-dehors de ces 2 racines.
  Donc ? ? ?[dessins]
- son discriminant : $(2ae + b)^2 - 4a(ae^2 + be + c)$
  $= \cancel{4a^2e^2} \cancel{+4abe} + b^2 \cancel{-4a^2e^2} \cancel{-4abe} - 4ac$
  $= b^2 - 4ac = \rho$
  est égal à celui de E.

Donc E_1 *admet également 2 racines de signes contraires.*

- En itérant le procédé, il y a, a priori, les éventualités suivantes :
  - à une étape p, on obtient une équation E_p dont la racine positive est entière ; c'est le cas du 1[er] exemple. *Le procédé s'arrête et par conséquent la racine positive de* E *est rationnelle.*
  - *le procédé se répète* sans que l'on obtienne une équation dont la racine positive soit entière. Dans ce cas, *on obtient nécessairement, à une étape* p *une équation* $E_p(\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0)$ *déjà rencontrée* car il n'y a qu'un nombre fini de triplets (α, β, γ) vérifiant les conditions
    $$\left| \begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z} \\ \alpha\gamma < 0 \\ \beta^2 - 4\alpha\gamma = \rho = b^2 - 4ac \end{array} \right.$$
    et donc il n'y a qu'un nombre fini d'équations E_1 différentes. C'est le cas des exemples 2 et 3.
    En effet, montrons qu'il n'y a qu'un nombre fini de triplets (α, β, γ) :
    1. $\left.\begin{array}{l} \alpha\gamma < 0 \Rightarrow -4\alpha\gamma > 0 \\ \rho = \beta^2 - 4\alpha\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \rho > \beta^2 \Rightarrow -\sqrt{\rho} < \beta < \sqrt{\rho}$
       Or, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers compris entre ces 2 valeurs.
    2. $\beta^2 - 4\alpha\gamma = \rho$
       $\iff \alpha\gamma = \frac{\beta^2 - \rho}{4}$
       Or pour chaque valeur de β, $\frac{\beta^2-\rho}{4}$ est constant donc $\alpha\gamma$ est constant.

3. Comme il n'y a qu'un nombre fini de couples d'entiers (α, γ) tels que $\alpha\gamma$ soit constant, on en déduit qu'il n'y a qu'un nombre fini de triplets (α, β, γ) vérifiant les conditions données ci-dessus.

5 Intérêt du procédé

On considère une équation du second degré, à coefficients entiers, admettant 2 *racines irrationnelles de signes contraires.* Ses racines sont irrationnelles si et seulement si son *discriminant* ρ *n'est pas le carré d'un entier.*
En effet : $x_{\frac{1}{2}} = \frac{-b\pm\sqrt{\rho}}{2a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Comme a et $b \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, il faut que $\sqrt{\rho} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Donc que ρ ne soit pas le carré d'un entier.

- On applique le procédé décrit précédemment.
Soit x, la racine positive de cette équation et e sa partie entière.
On pose $x = e + \frac{1}{y}$
$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \\ e \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \quad \text{donc } y \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$$
Si on décompose y de la même manière on obtient :
$y = e_1 + \frac{1}{y_1}$ où $y_1 \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$.
On décompose alors y_1 et ainsi de suite.
y_n sera toujours irrationnel et le procédé se répète à l'infini.

- Si on utilise ce procédé pour le 2^e^ exemple, on remarque qu'il construit *une suite de nombres rationnels qui converge vers la racine positive irrationnelle* de l'équation.
On sait que la racine x positive de E vérifie :
$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}$$
On pose : $f_0 = 2$
$$f_1 = 2 + \frac{1}{1}$$
$$f_2 = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$
$$f_3 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{1}}} \quad \text{et ainsi de suite.}$$
On calcule ces valeurs :
$f_0 = 2$

$$\mathsf{f}_1 = 3$$
$$\mathsf{f}_2 = \tfrac{8}{3} = 2,66\ldots6\ldots$$
$$\mathsf{f}_3 = \tfrac{11}{4} = 2,75$$
$$\mathsf{f}_4 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \tfrac{30}{11} = 2,72\ldots72\ldots$$

$$\mathsf{f}_5 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}} = \tfrac{41}{15} = 2,73\ldots3\ldots$$

$$\mathsf{f}_6 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}} = \tfrac{112}{41} = 2{,}731\ 707\ 317\ldots$$

$$\mathsf{f}_7 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}}}} = \tfrac{153}{56} = 2{,}732\ 142\ 857\ldots$$

$$\mathsf{f}_8 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}} = \tfrac{418}{153} = 2{,}732\ 026\ 144\ldots$$

$$\mathrm{f}_9 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}}}}}} = \tfrac{571}{209} = 2{,}732\ 057\ 416\ldots$$

$$\mathrm{f}_{10} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}}}}$$

$$= \tfrac{1560}{571} = 2{,}732\ 049\ 037\ldots$$

$$\mathrm{f}_{11} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}}}}}}}}$$

$$= \tfrac{2131}{780} = 2{,}732\ 051\ 282\ldots$$

$$f_{12} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}}}}}}$$

$$= \tfrac{5822}{2131} = 2{,}732\ 050\ 680\dots$$

$2 < \frac{8}{3} < \frac{30}{11} < \frac{112}{41} < \frac{418}{153} < \frac{1560}{571} < \frac{5822}{2131} < \frac{2131}{780} < \frac{571}{209} < \frac{153}{56} < \frac{41}{15} < \frac{11}{4} < 3$

$f_0 < f_2 < f_4 < f_6 < f_8 < f_{10} < f_{12} < f_{11} < f_9 < f_7 < f_5 < f_3 < f_1$

En cherchant la racine positive de E grâce à son discriminant et en calculant sa valeur approchée à l'aide de la calculatrice on peut vérifier que la suite f se rapproche de plus en plus de x.

$\rho = 4 + 8 = 12$

$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} 1 + \sqrt{3} > 0 \\ \cancel{1 - \sqrt{3} < 0} \end{cases}$

Soit $\overline{x} = 2{,}732\ 050\ 808$ la valeur de x affichée par la calculatrice.

Soit $\overline{f_k}$ les valeurs de f_k affichées par la calculatrice.

k	f_k	$\overline{f_k}$	valeur de $\overline{f_k} - \overline{x}$ affichée par la calculatrice
0	2	2	–0,732 050 807
1	3	3	0,267 949 12
2	$\frac{8}{3}$	$2,66\ldots6\ldots$	–0,065 384 14
3	$\frac{11}{4}$	$2,75$	0,017 949 192
4	$\frac{30}{11}$	$2,72\ldots72\ldots$	–0,004 778 080 29
5	$\frac{41}{15}$	$2,73\ldots3\ldots$	0,001 282 525 77
6	$\frac{112}{41}$	2,731 707 317...	–0,000 343 490 49
7	$\frac{153}{56}$	2,732 142 857...	0,000 092 049 58
8	$\frac{418}{153}$	2,732 026 144...	–0,000 024 663 77
9	$\frac{571}{209}$	2,732 057 416...	0,000 006 608 7
10	$\frac{1560}{571}$	2,732 049 037...	–0,000 001 770 79
11	$\frac{2131}{780}$	2,732 051 282...	0,000 000 474 49
12	$\frac{5822}{2131}$	2,732 050 68...	–0,000 000 127 13

Donc, *ce procédé construit une suite illimitée de nombres rationnels qui encadrent de mieux en mieux la racine positive irrationnelle de l'équation donnée.*

6 Précisions sur les éléments de cette suite

On reprend le 2e exemple : $1+\sqrt{3}$ vérifie $x = 2 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$

et $2 < 1+\sqrt{3} < 3$.

$f_0 = 2$

$f_1 = 2 + \frac{1}{1}$

$f_2 = 2 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}$

$f_3 = 2 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{1}}}$

etc.

Donc $f_n = 2 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{f_{n-2}}} = 2 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-2}+1} = \frac{2f_{n-2}+2+f_{n-2}}{f_{n-2}+1} = \frac{3f_{n-2}+2}{f_{n-2}+1}$

On peut ainsi définir f par $\begin{cases} f_0 = 2 \\ f_1 = 3 \\ f_n = \frac{3f_{n-2}+2}{f_{n-2}+1} & \forall n \geqslant 2 \end{cases}$

- $f_{n+2} = \frac{3f_n+2}{f_n+1}$ et $f_n = \frac{3f_{n-2}+2}{f_{n-2}+1}$
  $\iff f_{n-2}f_n + f_n - 3f_{n-2} = 2$
  $\iff f_{n-2} = \frac{2-f_n}{f_n-3}$

  d'où $(f_{n+2} - f_n)(f_n - f_{n-2}) = \left(\frac{3f_n+2}{f_n+1} - f_n\right)\left(f_n - \frac{2-f_n}{f_n-3}\right)$
  $= \frac{(3f_n+2-f_n^2-f_n)(f_n^2-3f_n-2+f_n)}{(f_n+1)(f_n-3)}$
  $= \frac{-(f_n^2-2f_n-2)^2}{(f_n+1)(f_n-3)}$

  or $\left| \begin{array}{l} (f_n^2 - 2f_n - 2)^2 \geqslant 0 \iff -(f_n^2 - 2f_n - 2)^2 \leqslant 0 \\ f_n \in [2;3] \Rightarrow f_n + 1 > 0 \\ \qquad\qquad \Rightarrow f_n - 3 < 0 \quad \text{(car } f_n = 3 \text{ ssi } n = 1\text{, or } f_{-1} \nexists) \end{array} \right.$
  donc $(f_{n+2} - f_n)(f_n - f_{n-2}) \geqslant 0$
  ou $f_{n+2} - f_n$ et $f_n - f_{n-2}$ sont de même signe.

  On en déduit :

si $f_{n+2} - f_n > 0$ alors $f_n < f_{n+2}$ et $f_2 - f_0 = 0,66\dots6\dots$ donc : $f_0 < f_2 < \dots$ $< f_{n-2} < f_n < f_{n+2} < \dots$ si n est pair	si $f_{n+2} - f_n < 0$ alors $f_n > f_{n+2}$ et $f_3 - f_1 = -0,25 < 0$ donc : $f_1 > f_3 > \dots$ $> f_{n-2} > f_n > f_{n+2} > \dots$ si n est impair

  La suite f se rapproche de plus en plus de la racine positive x,
  donc $\forall p \in \mathbb{N}$: $f_0 < f_2 < \cdots < f_{2p} < \cdots < x < \cdots < f_{2p+1} < \cdots < f_3 < f_1$.

7 Un exemple historique

Le texte qui suit est un commentaire du mathématicien français Lagrange* (1736 – 1813) à propos d'un texte de Newton* (1642 – 1727), que l'on trouve dans le livre de Jean Itard : *Arithmétique et théorie des Nombres* (PUF 1963).
Lagrange explique la façon dont Newton résout l'équation du 3e degré : $x^3 - 2x - 5 = 0$. Il utilise le procédé que nous venons d'appliquer.

- « ... On voit que la racine réelle de l'équation proposée sera entre les nombres 2 et 3, et qu'ainsi 2 sera la valeur entière la plus approchée de cette racine. »
  « Je fais maintenant $x = 2 + \frac{1}{y}$. » Il vient
  $f(y) = y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0$
  $f(10) = -61$, $f(11) = 54$
  « Je fais donc $z = 1 + \frac{1}{u}$. »
  $h(u) = 54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0$
  $h(1) = -71$, $h(2) = 293$

donc $u = 1 + \frac{1}{t}$, etc.
« En continuant de cette manière, on trouvera les nombres $2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12$, etc. » d'où l'on tirera les réduites :

$$\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{53}, \frac{155}{74}, \frac{576}{275}, \frac{731}{349}, \frac{1\ 307}{624}, \frac{16\ 415}{7\ 837}$$

« La première fraction est plus grande que la racine cherchée ; mais l'erreur sera moindre que $\frac{1}{7\ 837^2}$, c'est-à-dire moindre que 0,000 000 016 3 ; donc, si on réduit la fraction en fraction décimale, elle sera exacte jusqu'à la septième décimale : or, en faisant la division, on trouve 2,094 551 486 5 . . . ; ainsi la racine cherchée sera entre les nombres 2,094 551 149 et 2,094 551 147.
« Newton a trouvé par sa méthode la fraction 2,094 551 147 (voyez sa Méthode des suites infinies) ; d'où l'on voit que cette méthode donne dans ce cas un résultat fort exact ; mais on aurait tort de se promettre toujours une pareille exactitude. »

2 L'algorithme d'Euclide ou antiphérèse

A Exemples géométriques

1 Premier exemple

Pour étudier le rapport $\frac{\mathsf{AB}}{\mathsf{CD}}$ de deux segments AB et CD (on suppose toujours ici AB > CD), les mathématiciens de l'Antiquité procédaient ainsi :

???

2 Deuxième exemple

???

3 Troisième exemple

???

4 Quatrième exemple

???

B Exemples numériques

1 Premier exemple

???

2 Généralisation

???

3 Deuxième exemple

???

4 Troisième exemple

???

5 Quatrième exemple

???

6 Application

???

7 Complément

? ? ?

II Étude théorique

1 Définitions et propriétés

1 Fractions continues

Une expression telle que $q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots}}}$ où $\left| \begin{array}{l} q_0 \in \mathbb{N} \\ q_i \in \mathbb{N}_* \text{ si } i \neq 0 \end{array} \right.$
s'appelle une fraction continue et les nombres $q_0, q_1, q_2, \dots$ les *quotients incomplets* de la fraction continue (canonique).

- On la *note* $[q_0, q_1, q_2, \dots]$.
- On dit qu'elle est *limitée lorsqu'elle a un dernier quotient incomplet* et *illimitée dans l'autre cas.*

2 Fractions continues limitées

Une fraction continue limitée est un nombre *rationnel* dont on peut obtenir la valeur en effectuant les opérations de bas en haut.
Par exemple pour calculer la valeur de $[1, 2, 3, 4]$, on procède comme suit :

$$3 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{13}{14},\ 2 + \frac{1}{{}^{13}\!/\!{}_{4}} = \tfrac{30}{13},\ 1 + \frac{1}{{}^{30}\!/\!{}_{13}} = \tfrac{43}{30}$$

Et ainsi, $[1, 2, 3, 4] = \frac{43}{30}$.
? ? ?

3 Les réduites

? ? ?

4 Loi de formation des réduites

? ? ?

5 Propriété des suites a et b

? ? ?

6 Théorèmes

a Lemme

? ? ?

b Théorème I

???

c Théorème II

???

d Théorème III

???

e Conséquence de ces 3 théorèmes

???

f Corollaire 1

???

g Corollaire 2

???

h Corollaire 3

???

2 Valeur d'une fraction continue

1 Définition

La valeur d'une fraction continue est le nombre positif, limite de la suite de ses réduites.

2 Théorème

Une réduite s'approche plus de la valeur de la fraction continue que celle qui la précède.

??? graphe

Démonstration

• Soit la fraction continue

$$x = [q_0, q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots]$$

• Si n est pair :

D'après les corollaires 1 et 3, nous avons :

$$\begin{aligned} u_{n+2} < x < u_{n+1} &\iff -u_{n+1} < -x < -u_{n+2} \\ &\iff 0 < u_{n+1} - x < u_{n+1} - u_{n+2} \end{aligned}$$

Avec le théorème III nous obtenons :

$$u_{n+1} - u_{n+2} < \tfrac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) \Rightarrow u_{n+1} - x < \tfrac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)$$

Or $u_{n+1} - u_n = (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+2} - u_n)$

$$< \tfrac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) + (u_{n+2} - u_n) \qquad \text{(théorème III)}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) < u_{n+2} - u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - x < u_{n+2} - u_n < x - u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - x < x - u_n$$

• De même, si n est impair, on a aussi : $u_{n+1} - x < x - u_n$ □

Exemple : Voir 1.6.g.

3 Valeur approchée de x

Si $e_n = |x - u_n|$, représente l'*erreur absolue* commise en prenant la n^e réduite comme valeur de x, évaluons une borne supérieure de cette erreur.

• Si n est pair : $u_n < x < u_{n+1}$

$$\begin{aligned} &\iff 0 < x - u_n < u_{n+1} - u_n \\ &\iff e_n = |x - u_n| = x - u_n < u_{n+1} - u_n = |u_n - u_{n+1}| \end{aligned}$$

• Si n est impair : $u_{n+1} < x < u_n$

$$\begin{aligned} &\iff u_{n+1} - u_n < x - u_n < 0 \\ &\iff 0 < -x + u_n < u_n - u_{n+1} \\ &\iff e_n = |x - u_n| = -x + u_n < u_n - u_{n+1} = |u_n - u_{n+1}| \end{aligned}$$

• Donc, $\forall n$: $e_n < |u_n - u_{n+1}| = \frac{1}{b_n b_{n+1}} < \frac{1}{b_n^2}$

(théorème II) ($b_n < b_{n+1}$)

$\boxed{e_n < \frac{1}{b_n^2}}$

- Il est possible de trouver une autre borne supérieure, moins bonne que la précédente, mais ne nécessitant pas le calcul des dénominateurs (b_n).
  En effet, $e_n < |u_n - u_{n+1}| = |u_{n+1} - u_n| < \frac{1}{2^n q_1}$

  $\boxed{e_n < \frac{1}{2^n q_1}}$

- Exemple.
  Si on reprend l'exemple précédent (cf. 1.6.g) et que l'on veuille approcher la valeur de la fraction continue avec une erreur moindre que $\frac{1}{10}$, il suffit de faire :
  - $e_0 < \frac{1}{1^2} = 1$

    $e_1 < \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$

    $e_2 < \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0,11\ldots1\ldots$

    $e_3 < \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64} = 0,015625$

    donc $u_3 = \frac{11}{8} = 1,375$ approche la valeur de la fraction continue avec une erreur moindre que $0,015625 < 0,1$.
  - Ou, avec la 2e majoration, la relation

    $e_n < \frac{1}{2^n q_1} = \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{10} \Rightarrow n \geqslant 3$

    permet d'affirmer qu'à partir de la 3e réduite,
    l'erreur commise est inférieure à $\frac{1}{10}$.

4 Théorème

Lorsque'une fraction irréductible s'approche plus de la valeur d'une fraction continue qu'une réduite déterminée, alors, son numérateur et son dénominateur sont respectivement plus grands que ceux de cette réduite. Si $\lvert\frac{a}{b} - x\rvert < \lvert u_n - x\rvert$ alors $a > a_n$ et $b > b_n$.

Démonstration

- Soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible s'approchant plus de la valeur x d'une fraction continue que sa réduite de rang n (supposé pair).

$$\left.\begin{array}{l} u_n \text{ converge vers } n \\ \text{corollaire 1} \end{array}\right\} \Rightarrow u_n < \frac{a}{b} < u_{n-1}$$

$$\iff u_n - u_{n-1} < \frac{a}{b} - u_{n-1} < 0$$

$$\iff u_n - u_{n-1} < \frac{a}{b} - \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} < 0$$

$$\iff 0 < \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{a}{b} < u_{n-1} - u_n = \frac{1}{b_{n-1}b_n}$$

$$\iff 0 < \frac{ba_{n-1} - ab_{n-1}}{bb_{n-1}} < \frac{1}{b_{n-1}b_n}$$

$$\iff 0 < b_n(ba_{n-1} - ab_{n-1}) < b$$

Or $u_{n-1} > \frac{a}{b}$,

donc $a_{n-1}b > ab_{n-1}$

$$\iff \left.\begin{array}{l} a_{n-1}b - ab_{n-1} > 0 \\ a_{n-1}, a, b_{n-1}, b \in \mathbb{N}_0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{n-1}b - ab_{n-1} \geqslant 1$$

D'où $b > b_n$.

• De manière analogue,

$u_n < \frac{a}{b} < u_{n-1} \iff \frac{a_n}{b_n} < \frac{a}{b} < \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$

$\iff \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} < \frac{b}{a} < \frac{b_n}{a_n}$

$\iff 0 < \frac{b}{a} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} < \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$

$\iff 0 < \frac{a_{n-1}b - ab_{n-1}}{aa_{n-1}} < \frac{a_{n-1}b_n - a_n b_{n-1}}{a_n a_{n-1}} < \frac{1}{a_n a_{n-1}}$

$\iff 0 < a_n(a_{n-1}b - ab_{n-1}) < a$

Or $u_{n-1} > \frac{a}{b}$, donc $a > a_n$.

• De façon similaire, on peut démontrer que ces résultats restent valables quand n est impair. □

Remarque.

Ce théorème permet d'affirmer que la suite des réduites converge de façon optimale vers la valeur de la fraction continue ou plus exactement, qu'une réduite diffère moins de la valeur de la fraction continue que toute fraction irréductible ayant un numérateur et un dénominateur plus simples.

5 Exemples

a Le nombre π

$\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ 169\ 399\ 375\ldots$

π a pour développement (Lambert* 1794)

$[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, \ldots]$

Calculons les deuxièmes (Archimède*), troisième (Rivard) et quatrième (Métius) réduites et les estimations des erreurs correspondantes lorsqu'on identifie chacune de celles-ci au nombre π.

$u_0 = 3$ $\qquad u_1 = \frac{3.7+1}{7} = \frac{22}{7} = 3{,}142\ 857\ 142\ldots$

• $u_2 = \frac{15.22+3}{15.7+1} = \frac{333}{106} = 3{,}141\ 509\ 434\ldots$

$e_2 < \frac{1}{106^2} = 8,899\ldots.10^{-5}$

• $u_3 = \frac{1.333+22}{1.106+7} = \frac{355}{113} = 3{,}141\ 592\ 92\ldots$

$e_3 < \frac{1}{113^2} = 7,831\ldots.10^{-5}$

• $u_4 = \frac{292.355+333}{292.113+106} = \frac{103\ 933}{33\ 102} = 3{,}141\ 592\ 653\ldots$

$e_4 < \frac{1}{33\ 102^2} = 9,126\ldots.10^{-10}$

b Le nombre e

$e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352\ 662\ 497\ 757\ 247\ 093\ 699\ldots$

$e-1$ a pour développement (EULER* 1737)

$[1,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,\ldots]$

Plus précisément, les quotients incomplets sont définis par

$$\left| \begin{array}{ll} q_{3n+2} = 2(n+1) & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ q_i = 1 & \text{si } i \notin 3\mathbb{N}{+}2 \end{array} \right.$$

On en déduit que le développement de e est

$[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,\ldots]$

soit $\left| \begin{array}{ll} q_{3n+2} = 2(n+1) & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ q_i = 1 & \text{si } i \notin \{0\} \cup 3\mathbb{N} + 2 \\ q_0 = 2 & \end{array} \right.$

Calculons les deuxième, troisième et quatrième réduites de e.

$u_0 = 2$ $\qquad\qquad$ $u_1 = \frac{2.1+1}{1} = 3$

- $u_2 = \frac{2.3+2}{2.1+1} = \frac{8}{3} = 2,66\ldots6\ldots$

  $e_2 < \frac{1}{3^2} = 0,11\ldots1\ldots$

- $u_3 = \frac{1.8+3}{1.3+1} = \frac{11}{4} = 2,75$

  $e_3 < \frac{1}{4^2} = 0,0625$

- $u_4 = \frac{1.11+8}{1.4+3} = \frac{19}{7} = 2,714285714\ldots$

  $e_4 < \frac{1}{7^2} = 0,020408163\ldots$

6 Théorème

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \frac{a_n}{b_n} = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n] \text{ et } q_0 \neq 0, \\ \text{alors} \left| \begin{array}{l} \frac{a_n}{a_{n-1}} = [q_n, q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_0] \\ \frac{b_n}{b_{n-1}} = [q_n, q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_1] \end{array} \right. \end{array}}$$

Démonstration

- $a_n = q_n a_{n-1} + a_{n-2}$

$\Longleftrightarrow \frac{a_n}{a_{n_1}} = q_n + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = q_n + \frac{1}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$

Or $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = q_{n-1} + \frac{1}{\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}}$

et $\frac{a_2}{a_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_0}} = q_2 + \frac{1}{\frac{q_0 q_1 + 1}{q_0}} = q_2 + \dfrac{1}{q_1 + \frac{1}{q_0}}$

Donc $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q_n + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_{n-2} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_1 + \frac{1}{q_0}}}}}}$

$= [q_n, q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_2, q_1, q_0]$

• $b_n = q_n b_{n-1} + b_{n-2}$
$\Longleftrightarrow \ \frac{b_n}{b_{n_1}} = q_n + \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} = q_n + \frac{1}{\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}}$
Or $\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} = q_{n-1} + \frac{1}{\frac{b_{n-2}}{b_{n-3}}}$
et $\frac{b_2}{b_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{b_1}{b_2}} = q_2 + \frac{1}{q_1}$

Donc $\frac{b_n}{b_{n-1}} = q_n + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_{n-2} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_1}}}}}$

$= [q_n, q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_2, q_1]$ □

Exemple.

Reprenons l'exemple du point 1.4, on avait :

$u = [1, 2, 3, 4]$ $\qquad a_n = 1; 3; 10; 43$ $\qquad b_n = 1; 2; 7; 30.$

On a bien :

$\frac{a_4}{a_3} = \frac{43}{10} = [4, 3, 2, 1]$

et $\frac{b_4}{b_3} = \frac{30}{7} = [4, 3, 2]$.

3 Conversion de nombres positifs en fractions continues

1 Définition

???

2 Condition

???

3 Théorème 1

???

4 Théorème 2

???

5 Lien avec la recherche du plus grand commun diviseur

???

6 Quotients complets d'une fraction continue

???

7 Théorème 3

???

8 Théorème 4

???

Biographie

- **ARCHIMÈDE (−287, −212), grec.**
Comme physicien, on lui doit la première loi de l'*hydrostatique*, la vis sans fin, la théorie des leviers et des roues dentées. Comme mathématicien, on lui doit un calcul de π par des polygones inscrits à grand nombre de côtés, l'aire et le volume des corps ronds, l'étude des spirales et des tangentes aux courbes.

- **Augustin-Louis CAUCHY (1789, 1857), français.**
On lui doit une rénovation de l'analyse mathématique par l'emploi de *méthodes rigoureuses*. Il s'occupera aussi du calcul des *séries*, des fonctions de variables complexes et il fondera la théorie des *groupes finis*. Il a aussi énoncé des théorèmes fondamentaux sur les déterminants et sur les équations différentielles.

- **EUCLIDE (vers −315, vers −255), grec.**
Rien de positif n'est connu sur sa vie, et on s'est demandé si son nom ne serait pas l'appellation d'une école mathématique. Ses *Éléments*, 13 livres contenant 372 théorèmes et 93 problèmes, récapitulent méthodiquement les connaissances mathématiques de l'Antiquité antérieures à ARCHIMÈDE. La petite dizaine d'axiomes et de postulats d'EUCLIDE sont à la base de la mathématique qui va régner jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle. Ensuite, HILBERT montrera qu'il faut 27 axiomes pour que la géométrie d'EUCLIDE "marche" et, en niant le fameux *axiome des parallèles*, LOBATCHEVSKI et RIEMANN créeront des géométries nouvelles.

- **Leonhard EULER (1707, 1783), suisse.**
Il a publié 30 volumes de mathématiques, 32 de mécanique et d'astronomie et 12 de physique ou de recherches diverses. Il étudie en détail les fonctions circulaires, *logarithmiques* et *exponentielles* (e est l'initiale d'EULER !). Il a redonné de l'élan aux travaux de FERMAT dans la théorie des nombres et préparé la voie à de nombreux résultats démontrés ou généralisés par LAGRANGE.

• **Christian HUYGENS (1629, 1695), néerlandais.**
Inventeur de l'horloge à balancier, on lui doit aussi les concepts de force centrifuge, de moment d'inertie, de résonance et la résolution correcte du problème des chocs. En mathématique, il compose le premier traité complet sur les *probabilités*, invente la théorie des *développées et développantes*, rectifie la cissoïde, établit la théorie de la fonction *logarithmique* et de la chaînette.

• **Joseph Louis LAGRANGE, comte de (1736, 1813), français.**
Il participa à l'élaboration du système métrique. Principalement connu pour ses travaux en mécanique, on lui doit aussi des méthodes d'*approximation de racines* d'équations et des travaux d'arithmétique.

• **Johan Heinrich LAMBERT (1728, 1777), suisse-allemand.**
Il prouva rigoureusement que π *est irrationnel*, édita un almanach d'astronomie et mesura les intensités lumineuses. On lui doit aussi la *trigonométrie sphérique*.

• **Sir Isaac NEWTON (1642, 1727), anglais.**
Il découvrit la loi de *gravitation universelle* et inventa le *télescope*. Il formula également une définition correcte de la lumière blanche. En mathématique, il inventa, parallèlement à LEIBNIZ, le *calcul différentiel*.

• **PYTHAGORE de Samos (vers −530, vers −500), grec.**
On lui doit la relation des *triangles rectangles*, l'incommensurabilité de la racine de 2, les tables de multiplications et le *système décimal* avec des lettres grecques. Son harmonie numérique du monde lui fit postuler que la *terre était une sphère*.

• **THALÈS de Milet (−624, −546), grec.**
On lui doit les cas d'*isométrie des triangles*, l'égalité des angles à la base d'un triangle isocèle, des propriétés des angles inscrits dans un cercle et le théorème des segments proportionnels. Il fut l'un des 7 Sages de l'Antiquité ; sa devise était “Connais-toi toi-même”.

Bibliographie

[1] F. Drapier,
Fractions continues.
Centre de Didactique des sciences, Université de Mons.

[2] N.-J. Schons,
Compléments d'Arithmétique et d'Algèbre.
Namur-Bruxelles, La Procure, 1971, 8e édition.

[3] F. Carlier, G. et A. Marin, N. Miewis, R. Mostaert, A. Festraets, A. Mertens,
Dictionnaire des mathématiciens.
Liège-Grivegnée, Math-Jeunes.

[4] ***Petit Larousse illustré*** 1987.
Paris, Librairie Larousse, 1986.

$\mathcal{D}$TEX*tes*

mis en page sous DSTEX

le 2 janvier 2012

http://www.opimedia.be/DS/