Dualité lagrangienne

Olivier Pirson

Présentation pour l'examen oral de
INFO-F524 *Continuous optimization*

Département d'Informatique
Université Libre de Bruxelles

19 juin 2017
(Some corrections November 26, 2017)

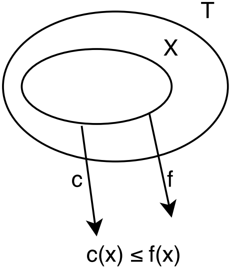
Dernière version : `https://bitbucket.org/OPiMedia/dualite-lagrangienne`

Principe général de relaxation

Pour le programme
$z = \max\{c(x) \mid x \in X \subseteq R^n\}$

$z^R = \max\{f(x) \mid x \in T \subseteq R^n\}$
est une *relaxation* si

- $X \subseteq T$
- $c(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in X$



$\Longrightarrow$ z^R est une borne supérieure du problème initial

Programme en nombre entiers (PE)

Soit

$$
\begin{array}{lll}
z = \max cx & & \\
\text{sous les contraintes} & Ax \leq b, & k \text{ contraintes ``faciles''} \\
& Dx \leq d, & m \text{ contraintes ``difficiles''} \\
& x \in \mathbb{N}^n &
\end{array}
$$

$$
\text{avec} \quad
\begin{array}{l}
m, n \in \mathbb{N}_* \\
c \in \mathbb{R}^n \\
A \in \mathbb{R}^{k,n} \\
b \in \mathbb{R}^k \\
D \in \mathbb{R}^{m,n} \\
d \in \mathbb{R}^m
\end{array}
$$

Reformulation du problème

Remplaçons les contraintes "faciles" par une formulation implicite :

$z = \max cx$

s.c. $Dx \leq d$, $\qquad$ m contraintes "difficiles"

$\qquad x \in X = \{x \in \mathbb{N}^n \mid Ax \leq b\}$

Relaxation lagrangienne ($RL(u)$)

$\forall u \in \mathbb{R}^m_+$ on défini le problème $RL(u)$:

$$z(u) = \max cx + \underbrace{u(d - Dx)}_{\text{pénalités}}$$

$$\text{s.c. } x \in X$$

u est appelé multiplicateur de Lagrange

$\forall u \in \mathbb{R}^m_+$: $RL(u)$ est une relaxation de (PE) car

- $\{x \in X \mid Dx \le d\} \subseteq X$
- $\left.\begin{array}{l} u \ge 0 \\ Dx \le d \end{array}\right| \Longrightarrow \quad cx + u(d - Dx) \ge cx$

$\Longrightarrow$ $RL(u)$ fournit une borne supérieure pour (PE)

$$z(u) = \max cx + u(d - Dx)$$

Prenons la meilleure relaxation possible :

$$w_{LD} = \min_{u \geq 0} z(u)$$

Dual lagrangien

$z(u) = \max cx + u(d - Dx)$

Prenons la meilleure relaxation possible :
$w_{LD} = \min_{u \geq 0} z(u)$

Proposition

Une solution $x(u)$ optimale de $RL(u)$
qui est admissible pour (EP)
et telle que $(Dx(u))_i = d_i$ si $u_i > 0$ (complémentarité) [a]
est aussi optimale pour (EP)

a. Toujours vrai si contraintes d'égalités.

En effet :
$w_{LD} = \min_{u \geq 0} z(u) \leq cx(u) + u(d - Dx(u)) = cx(u)$

$$\left.\begin{array}{l} x(u) \in X \\ Dx(u) \leq d \end{array}\right\} \implies cx(u) \leq z^\star$$

$z^\star \leq w_{LD} \implies x(u)$ est solution optimale de (PE)

Qualité du dual lagrangien

Supposons, par simplicité, $X = \{x^1, x^2, \ldots, x^T\}$ fini, avec T très grand

$$
\begin{aligned}
w_{LD} &= \min_{u \geq 0} z(u) \\
&= \min_{u \geq 0} \{ \max_{x \in X} cx + u(d - Dx) \} \\
&= \min_{u \geq 0} \{ \max_{t=1,\ldots,T} cx^t + u(d - Dx^t) \} \\
&= \ \min \eta \\
&\quad\ \text{s.c. } \eta \geq cx^t + u(d - Dx^t) \text{ pour } t = 1, \ldots, T \\
&\qquad\quad\ u \in \mathbb{R}^m_+ \\
&\qquad\quad\ \eta \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

η représente une borne supérieure de $z(u)$

Qualité du dual lagrangien

$$
\begin{aligned}
w_{LD} = \ & \min \eta \\
& \text{s.c. } \eta \geq cx^t + u(d - Dx^t) \text{ pour } t = 1, \ldots, T \\
& \qquad u \in \mathbb{R}^m_+ \\
& \qquad \eta \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

est un programme linéaire.

Prenons son dual :

$$
\begin{aligned}
w_{LD} = \ & \max \sum_{t=1}^{T} \mu_t cx^t \\
& \text{s.c. } \sum_{t=1}^{T} \mu_t = 1 \\
& \qquad -\sum_{t=1}^{T} \mu_t (d - Dx^t) \leq 0 \\
& \qquad \mu_t \in \mathbb{R}^T_+
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} w_{LD} = \ & \max \sum_{t=1}^{T} \mu_t c x^t \\ & \text{s.c. } \sum_{t=1}^{T} \mu_t = 1 \\ & \qquad -\sum_{t=1}^{T} \mu_t (d - Dx^t) \leq 0 \\ & \qquad \mu_t \in \mathbb{R}_+^T \end{aligned}$$

Théorème

En posant $x = \sum_{t=1}^{T} \mu_t x^t$ avec $\sum_{t=1}^{T} \mu_t = 1$ et $\mu_t \in \mathbb{R}_+^T$:

$$\begin{aligned} w_{LD} = \ & \max cx \\ & \text{s.c. } Dx \leq d \\ & \qquad x \in conv(X) \end{aligned}$$

Il est possible de montrer que ce résultat reste valable pour X infini.

La preuve de ce résultat révèle la structure du dual lagrangien.
$z(u)$ est convexe, linéaire par morceaux et non différentiable.

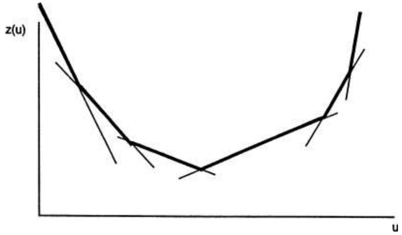


Figure – [Wolsey 1998]

Qualité du dual lagrangien

Corollaire

Si $conv(X) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid Ax \leq b\}$
alors $w_{LD} = \max\{cx \mid Ax \leq b, Dx \leq d, x \in \mathbb{R}^n_+\} = z_{\text{relaxation linéaire}}$

Moyen de résoudre un programme linéaire
avec un nombre exponentiel de contraintes
sans les traiter explicitement.

Résolution du dual lagrangien

$$w_{LD} = \min_{u \geq 0} z(u)$$
avec $z(u) = \max_{t=1,\ldots,T} \{cx^t + u(d - Dx^t)\}$

Grand nombre de contraintes.

Algorithme de plans coupants souvent difficile et peu efficace.

Sous-gradient

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.
Un *sous-gradient* en u de f est un vecteur $\gamma(u) \in \mathbb{R}^m$ tel que
$f(v) \geq f(u) + \gamma(u)^T(v-u) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^m$

Si f est de classe C^1 alors c'est le gradient
$\gamma(u) = \nabla f(u) = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_m}, \right)(u)$

Algorithme de sous-gradient

Initialisation : $u = u^0$
Itération k **:** $u = u^k$

- Résoudre $RL(u^k)$, de solution optimale $x(u^k)$
- $u^{k+1} = \max\{0, u^k - \mu_k(d - Dx(u^k))\}$
- $k \leftarrow k + 1$

$d - Dx(u^k)$ est un sous-gradient de $z(u)$ en u^k

Algorithme simple, mais difficulté de choisir les pas μ_k

Théorème

- $$\left.\begin{array}{l} \sum_k \mu_k \to \infty \\ \mu_k \to 0 \end{array}\right| \Rightarrow z(\mu_k) \to w_{LD}$$

- $$\left.\begin{array}{l} \rho < 1 \\ \mu_k = \mu_0 \rho^k \\ \mu_0 \text{ et } \rho \text{ suffisamment grands} \end{array}\right| \Rightarrow z(\mu_k) \to w_{LD}$$

- $$\left.\begin{array}{l} \overline{w} \geq w_{LD} \\ \mu_k = \varepsilon_k \frac{z(u^k) - \overline{w}}{\|d - Dx(u^k)\|^2} \\ 0 < \varepsilon_k < 2 \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} z(\mu_k) \to w_{LD} \\ \text{ou l'algorithme trouve } u^k \text{ tel que} \\ \qquad \overline{w} \geq z(\mu_k) \geq w_{LD} \end{array}\right.$$

Références

Références :

- Bernard Fortz.
  Cours **INFO-F524** ***Continuous optimization***.
  Université Libre de Bruxelles, 2017
- Laurence A. Wolsey.
  Integer Programming.
  Wiley, 1998
- Luigi Rados d'après Bosio.
  Gravure *Joseph Louis* de Lagrange.
  Académie des Sciences, Paris