La Théologie des Machines

Séminaire donné par

Bruno Marchal [1]

2007 – 2008 (IRIDIA/ CEΨ [2])

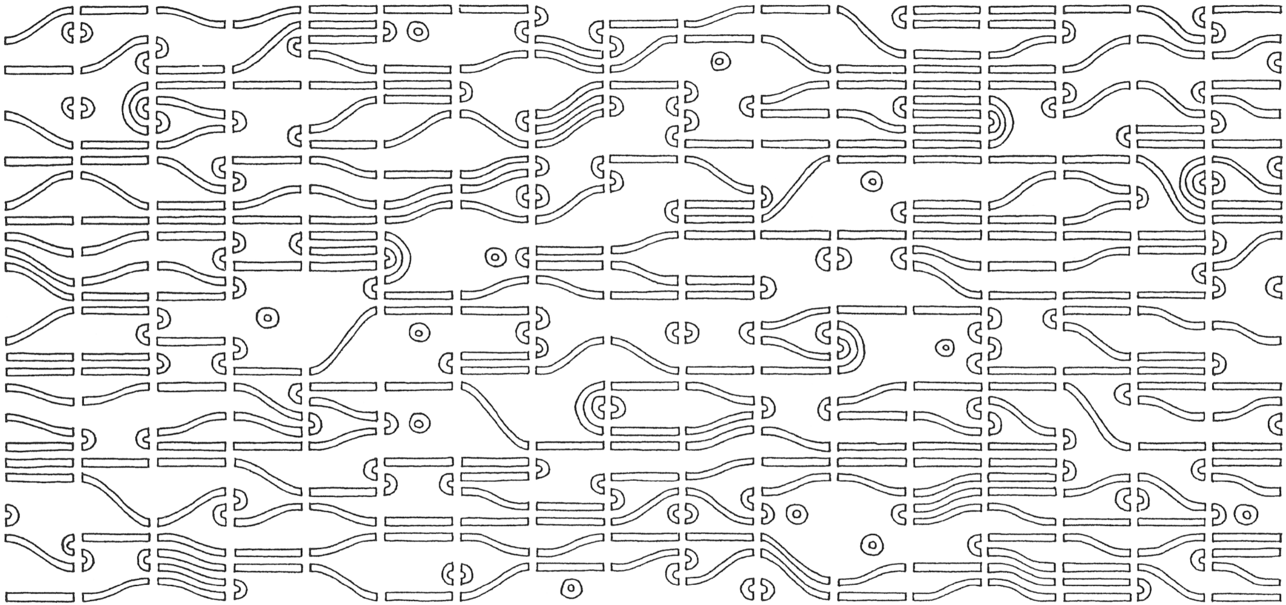
Notes d'Olivier Pirson

olivier_pirson_opi@yahoo.fr

http://www.opimedia.be/

mardi 13 avril 2010

1. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/
2. http://www.ulb.ac.be/cepsy/



The Temperleylieb Story (Daniel Lehman)

Note d'introduction au séminaire

"Que peuvent croire, savoir, espérer et parier au sujet d'elle-mêmes, des machines universelles idéalement correctes ? Le séminaire CEPSY - IRIDIA - CoDE introduit cette année 2007 - 2008 la théorie des machines universelles, ainsi qu'à leurs logiques de l'autoréférence. Le discours des machines universelles sera comparé aux théologies néoplatoniciennes de Plotin, Proclus et Damascius."

(Bruno Marchal)

"Une fois n'est pas coutume : cette année sera consacrée à une introduction aux travaux que nous avons développés à Bruxelles (IRIDIA) et à Lille (LIFL). Nous allons étudier les logiques de l'autoréférence d'une vaste classe de machines universelles. Nous allons nous intéresser tout particulièrement à la différence entre la vérité autoréférentielle *sur* la machine moins la prouvabilité autoréférentielle *par* la machine, en utilisant les logiques G et G* de Solovay et leurs variantes modales. Nous montrerons comment, en supposant explicitement une hypothèse en sciences cognitives, ces logiques entraînent des conséquences testables empiriquement, ou mathématiquement si on accepte que le monde physique est décrit par la mécanique quantique. Le séminaire ne nécessite pas de prérequis autre qu'un intérêt pour l'approche formelle des questions fondamentales. Comme chaque année, le séminaire s'adaptera au public varié. Le séminaire introduit l'informatique théorique et son application aux questions fondamentales.

Calculabilité et thèse de Church (I, II, III et IV)
Incomplétude de Gödel par la thèse de Church
Incomplétude de Gödel sans thèse de Church
Les théorèmes de Gödel, Löb et Solovay I
Les théorèmes de Gödel, Löb et Solovay II
Logiques modales (I, II, III et IV)
Logiques de la prouvabilité löbienne : G
Logiques de la prouvabilité löbienne : G*
$G^* \setminus G$: la théologie des machines
La machine et ses huit "soi"
Mécanique quantique élémentaire
Logique quantique et calcul quantique
De l'autoréférence aux logiques quantiques : intuition
De l'autoréférence aux logiques quantiques : formalisation
Interprétations arithmétiques de l'observation (Z1 et Z1*)
Interprétations arithmétiques de l'observation personnelle (X1 et X1*)
Comparaisons et conjectures, débat et discussion"

(Bruno Marchal)

“Nous allons, en partant pratiquement de zéro, approfondir la notion (mathématique) de machine universelle (due à Emil POST, Alonzo CHURCH, Alan TURING, Stephen Cole KLEENE, etc.).
Ensuite on va étudier les machines löbiennes. Grosso modo, une machine universelle löbienne est une machine universelle qui “sait” qu'elle est universelle. “Savoir” est pris dans un sens technique très faible. En particulier je compte expliquer que des théories formelles comme l'arithmetique de PEANO, ou la théorie des ensembles de ZERMELO - FRAENKEL, définissent canoniquement des machines löbiennes.
On va étudier ce que de telles machines sont capable de prouver sur elles-mêmes, mais on étudiera aussi et surtout la collection des propositions qu'elles savent “produire comme vrai” tout en étant incapable de les prouver : la part proprement “théologique”.

Les prérequis sont minimaux : savoir compter, savoir comparer deux nombres, etc. En gros ce sont les prérequis de la machine universelle elle-même.

Dans un second temps, on va comparer ces discours auto-référentiels avec les théologies néoplatoniciennes de PLOTIN, PROCLUS et DAMASCIUS. Si on a le temps on regardera aussi AUGUSTIN, et peut-être LEIBNIZ. L'année académique prochaine on va comparer la nature de la réalité physique chez les (néo)-platoniciens, chez les machines universelles (idéalement correctes) et en physique contemporaine.

Ici le prérequis de base est :
Lambros COULOUBARITSIS : *Histoire de la philosophie ancienne et médiévale.* Grasset, Paris 1998.
Bon, je plaisante un peu, c'est une très grosse brique. On se contentera de consulter cet ouvrage pour situer les néoplatoniciens dans leurs contextes historiques. D'autres références seront alors suggérées au cours. On peut aussi consulter mon papier, que j'ai présenté au congrès internationnal de calculabilité à Sienne, cet été, sur l'interprétation arithmétique de PLOTIN, dont le PDF est accessible ici :
http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/publications/CiE2007/SIENA.pdf”

(Bruno MARCHAL/ [CandiULB])

À propos de ce document

Ne vous fiez pas à l'aspect propret de ce carnet. Son contenu est une succession de notes brouillonnes (prises lors du séminaire de Bruno MARCHAL), souvent incomplètes et non retravaillées.

Le tout n'engage que moi, et est livré tel quel, sans garantie.

Olivier PIRSON

1 Samedi 24 novembre 2007 : Introduction

→ `TheolMachine_BMarchal_01_20071124_1_Intro.mp3` (8,76 Mo) (38'16)
→ `TheolMachine_BMarchal_01_20071124_2_Plan.mp3` (11,9 Mo) (52'11)

1.1 Introduction

MU := machine universelle

Machine löbienne ≃ machine universelle qui "sait" qu'elle est universelle

Théorème de LÖB : ~généralisation du théorème GÖDEL

Théorème fondamental
$\boxed{\text{Toutes les MU sont } \textit{insecures}}$ (pas parfaites)

Pas sécurisable contre les bugs.

Wisdom of security / *Éloge de l'insécurité* (Alan WATTS)

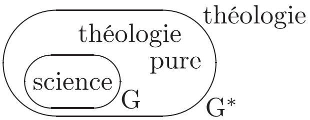
Les machines löbiennes savent qu'elles sont insecures.
Le théorème de GÖDEL est accessible aux machines elles-mêmes.
Un ordinateur est l'"incarnation" d'une MU.

Charles BABBAGE
Ada LOVELACE

Toutes les machiens löbiennes sont universelles (donc du point de vue de la calculabilité), mais il y a une hiérarchie de capacité de prouvabilité.

$$\text{Théologie pure} := \underbrace{\text{Vérité}}_{\substack{\text{au sens de} \\ \text{TARSKI - GÖDEL}}} \setminus \underbrace{\text{prouvabilité}}_{\substack{\text{au sens de} \\ \text{GÖDEL (Bew)}}} \longleftarrow \begin{matrix}\text{SOLOVAY} \\ G,\ G^*\end{matrix}$$

$= \{\text{vérité indémontrable}\}$



Théologie des grecques

PLATON aurait inventé le mot théologie : science des dieux, des ~concepts

Remarque de Henri : forme d'autoréférence maximale

Le théorème d'incomplétude de GÖDEL est pour *Principia Mathematica* (RUSSELL et WHITEHEAD)

Exemples de machine löbienne : *Principia Mathematica*
AP (Arithmétique de PEANO)

Le concept de *löbiennité* est plus général que le concept de machine.

Théologie : théorie des infinis

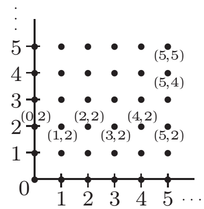
1.2 Plan

- ensemble
- bijection
- théorème de Cantor
- ...

Ensemble des nombres naturels $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
Ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Produit cartésien
$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ (en compréhension)

$$\begin{aligned}\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{&(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\} \\ = \{&(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), \dots \\ &(0,1), (1,1), (2,1), (3,1), \dots \\ &(0,2), (1,2), (2,2), (3,2), \dots \\ &(0,3), (1,3), (2,3), (3,3), \dots \\ &\dots\} \quad \text{(en extension)}\end{aligned}$$



Ensemble des nombres rationnels (fractions) $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{n}{d} \mid n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}_* \right\}$

$\frac{n}{d} := x$ tel que $n = d.x$
Pour $d = 0$, on aurait :
si $n \neq 0$ alors $0 \neq n = d.x = 0$ KO
si $n = 0$ alors $\forall x : 0 = n = 0.x$, donc $\frac{0}{0}$ serait indéterminé
Donc on ne peut pas diviser par 0

Commentaire personnel

Arithmétique de Robinson : $0, s, +, .$
~AP sans axiome d'induction
universelle mais pas löbienne

Arithmétique de Presburger : $0, s, +$
~AP sans .
consistante, complète, décidable

Arithmétique de Skolem : . (Pas de s ? Et 0 ?)

2 Samedi 1er décembre 2007 : Nombres irrationnels

→ `TheolMachine_BMarchal_02_20071201_1_Theol.mp3` (9, 95 Mo) (43'28)
→ `TheolMachine_BMarchal_02_20071201_2_Irrationnels.mp3` (14, 6 Mo) (1h03'51)

Théologie *des* machines : sur les machines et pour les machines

Théorème fondamental

Toutes les MU sont imparfaites (insécurisables)

Machine löbienne ≃ machine universelle qui "sait" qu'elle est universelle
⟹ elle "sait" qu'elle est imparfaite

Définition plus générale : $\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Box p \to p\end{matrix}}{p}$ LR (Löb Rule)

$\Box(\Box p \to p) \longrightarrow \Box p$

inférence abductive ?

Commentaire personnel

latin *abductus* : qui s'écarte

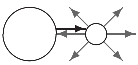
---

finitiste : ne croit qu'aux choses finies mais accepte l'infini potentiel de Brouwer - Kronecker - ...

AP est finitiste

ultrafinitiste : n'accepte même pas d'infini potentiel

Une machine (suffisament) plus riche sait étudier totalement une moins riche. La moins riche peut inférer qu'elle a les mêmes vérités que les plus riches.



2.1 Représentation décimale, nombres irrationnelles

Ensemble des nombres réels $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \oplus \{\text{nombre irrationnel}\}$ [1]

Ensemble des nombres complexes $\mathbb{C} := \{a + i.b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ où $i^2 = -1$
. est une rotation dans le plan (dimension 2)

Ensemble des quaternions $\mathbb{H} := \{a + i.b + j.c + k.d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$
où i, j, k tels que ...
. est une rotation dans l'espace-temps (dimension 4)
(. non commutative)

1. $A \oplus B := A \cup B$ avec de plus, sous-entendu, $A \cap B = \emptyset$

Ensemble des octonions $\mathbb{O}$ (. non commutative, non associative)

...

fraction $\frac{p}{q}$ $=$ $\boxed{\text{partie entière}}$, $\boxed{\text{partie décimale avant période}}$ $\boxed{\text{période}}$ $\boxed{\text{période}}$

...

Trouver p et q entiers tels que $\frac{p}{q} = 31,7\overset{\frown}{28} = 31,728282828\ldots$:

Soit $x = 31,7\overset{\frown}{28}$:

$$\begin{array}{rrl} & 1000x = & 31728,\overset{\frown}{28} \\ - & 10x = & 317,\overset{\frown}{28} \\ \hline & 990x = & 31411,\overset{\frown}{00} \end{array}$$

On utilise la propriété $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \ x - x = 0}$

Donc $31,7\overset{\frown}{28} = x = \frac{31\ 411}{990}$

De la même façon on montre que $0,\overset{\frown}{9} = 0,9999\cdots = 1$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \nexists p, q \in \mathbb{Z} : \ \frac{p}{q} = x}$ car $\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{Z}_* : \ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

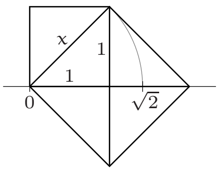
Existe-t-il au-moins un nombre irrationnel ?

Oui, par exemples :

$0,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\ldots$ la constante de Champernowne (ou nombre de Mahler) [OEIS, A033307]

$0,1\,22\,333\,4444\,55555\ldots$

$0,12\,0\,12\,00\,12\,000\,12\,0000\,12\,00000\,12\ldots$



Surface du petit carré $s = 1.1 = 1$

Surface d'un triangle $= \frac{s}{2} = \frac{1}{2}$

Surface du grand carré $S = x^2 = 4.\frac{s}{2} = 4.\frac{1}{2} = 2$

Donc $x = \sqrt{2}$, or $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Exercice : montrer que $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$

Commentaire personnel

Fraction continue limitée (cf. [Fractions continues])

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_k}}}} \quad \text{avec} \left| \begin{array}{l} a_0 \in \mathbb{Z} \\ a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}_* \end{array} \right.$$

Fraction continue $[a_0, a_1, a_2, \ldots] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$ avec $\left| \begin{array}{l} a_0 \in \mathbb{Z} \\ \forall i \in \mathbb{N}_* : a_i \in \mathbb{N}_* \end{array} \right.$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{Q} \iff \text{le développement de } x \text{ en fraction continue est limité}}$$

Démonstration

$\Rightarrow$) Pour $x \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$, et où les $a_i, n_i \in \mathbb{N}$:

$$x = \frac{n_0}{n_1} = \frac{a_0 n_1 + n_2}{n_1} = a_0 + \frac{n_2}{n_1} = a_0 + 1/\tfrac{n_1}{n_2} \quad \text{avec } n_2 < n_1$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{a_1 n_2 + n_3}{n_2} = a_1 + \frac{n_3}{n_2} = a_1 + 1/\tfrac{n_2}{n_3} \quad \text{avec } n_3 < n_2$$

$$\frac{n_2}{n_3} = \frac{a_2 n_3 + n_4}{n_3} = a_2 + \frac{n_4}{n_3} = a_2 + 1/\tfrac{n_3}{n_4} \quad \text{avec } n_4 < n_3$$

...

Comme les n_i ne peuvent pas indéfiniment décroître strictement dans $\mathbb{N}$, le processus s'arrête après un nombre fini d'étapes.

$\Leftarrow$) Pour $k \in \mathbb{N}_*$ et $x = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$:

$a_k \in \mathbb{Z}_* \subset \mathbb{Q}_*$ [2]

$a_{k-1} + \frac{1}{a_k} \in \mathbb{Q}_*$

...

$x \in \mathbb{Q}_*$ □

Soit $x = \sqrt{2}$: $\left| \begin{array}{l} x^2 = 2 \\ (x-1)(x+1) = x^2 - 1 = 1 \\ x = 1 + \frac{1}{x+1} \end{array} \right.$

$$\text{Donc } \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ldots}}}$$

$$= [1, \overset{\frown}{2}] = [1, 2, 2, 2, \ldots]$$

---

3 Samedi 8 décembre 2007 : Racine carré de 2

→ `TheolMachine_BMarchal_03_20071208_1_sqrt2.mp3` (13,4 Mo) (58'58)
→ `TheolMachine_BMarchal_03_20071208_2.mp3` (10,2 Mo) (44'47)

E est infini dénombrable (ou énumérable)

$\overset{\triangle}{\iff}$ $\exists$ bijection : $\mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow E$

$\iff \exists (f_i)_{i \in \mathbb{N}} : \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \{f_i\} = E$

c.-à-d. qu'il existe une suite qui énumère les éléments de E (tous, une et une seule fois)

E est dénombrable $\overset{\triangle}{\iff}$ E est fini ou $\exists$ bijection : $\mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow E$

$\iff \exists$ surjection : $\mathbb{N} \twoheadrightarrow E$

$\iff \exists$ injection : $E \rightarrowtail \mathbb{N}$

E est indénombrable $\overset{\triangle}{\iff}$ E est infini non dénombrable

---

2. J'utilise les notations $\subseteq$ (inclus) et $\subset$ (strictement inclus), par analogie avec $\leqslant$ et $<$.

Soit une suite d'ensembles infinis dénombrables : $\left| \begin{array}{l} E_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \\ E_1 := \{0', 1', 2', 3', \ldots\} \\ E_2 := \{0'', 1'', 2'', 3'', \ldots\} \\ \ldots \end{array} \right.$

$\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} E_i$ est infini dénombrable

$\underset{i \in \mathbb{N}}{\times} E_i$ est par contre indénombrable

Passer de la diagonalisation de CANTOR à celle de KLEENE, c'est un peu comme passer de l'invocation de "Dieu" à l'invocation de "l'humble créature finie qui doit résoudre en un temps fini".

Commentaire personnel

Peut-on imaginer la possibilité d'une "géométrie" dans laquelle tout est nombre entier ou rapport de nombres entiers ?

Lemme : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} : \ n \text{ est pair} \iff n^2 \text{ est pair}}$

Démonstration

$\Rightarrow$) $n = 2k$ est pair $\implies n^2 = 4k^2$ est pair

$\Leftarrow$) $n = 2k + 1$ est impair $\implies n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair
Donc n^2 est pair $\implies n$ est pair

$\square$

Théorème : $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$

Démonstration (par l'absurde)

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Alors $\exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}_* : \ \frac{p}{q} = \sqrt{2}$
Si p et q sont tous les deux pairs,
alors on peut les diviser tous les deux par 2 tant que c'est possible.
Donc $\exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}_* : \left| \begin{array}{l} \frac{p}{q} = \sqrt{2} \\ p \text{ est impair ou } q \text{ est impair} \end{array} \right.$

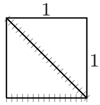
$p = \sqrt{2}\, q$
$p^2 = 2q^2 \quad \implies p^2$ est pair $\implies p$ est pair

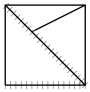
Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$
$4k^2 = p^2 = 2q^2$
$2k^2 = q^2 \quad \implies q^2$ est pair $\implies q$ est pair

KO, donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (On aboutit à une contradiction,
donc la **supposition** de départ est fausse)

$\square$

Démonstration géométrique (par l'absurde)

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
Alors $\exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}_* : \frac{p}{q} = \sqrt{2}$
et il existe une unité telle que l'on puisse : 

On replie : 

… descente infinie … KO □

Commentaire personnel

Peut-on démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ de façon "directe", sans passer par l'absurde ? N'en connaît pas.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{P}, \forall n \in \mathbb{Z} : p \backslash n \iff p \backslash n^2}$$ [3]

Démonstration

$\Leftarrow$) par le lemme d'Euclide (ou théorème de Gauss), cf. [Nombres 1] □

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{P} : \sqrt{p} \notin \mathbb{Q}}$$ et plus généralement

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}_*, \forall p_1, p_2, \ldots, p_r \text{ distincts } \in \mathbb{P} : \sqrt{\prod_{i=1}^{r} p_i} = \prod_{i=1}^{r} \sqrt{p_i} \notin \mathbb{Q}}$$

Démonstration (par l'absurde)

Supposons que $\prod_{i=1}^{r} \sqrt{p_i} \in \mathbb{Q}$

Alors $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}_* : \frac{a}{b} = \prod_{i=1}^{r} \sqrt{p_i}$

Si la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas réduite on peut la réduire,

donc $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}_* : \left| \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \prod_{i=1}^{r} \sqrt{p_i} \\ a \perp b \end{array} \right.$ [4]

$$a = b \prod_{i=1}^{r} \sqrt{p_i}$$

$$a^2 = b^2 \prod_{i=1}^{r} p_i \quad \Longrightarrow \forall i : p_i \backslash a^2 \quad \Longrightarrow \forall i : p_i \backslash a$$

Comme les p_i sont distincts : $\prod_{i=1}^{r} p_i \backslash a$

Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k \prod_{i=1}^{r} p_i$

3. $\mathbb{P} := \{\text{nombre premier}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots\}$
$\forall d \in \mathbb{Z}_*, \forall n \in \mathbb{Z} : d \backslash n \overset{\triangle}{\iff} d$ divise n, c.-à-d. que $\exists q \in \mathbb{Z} : n = q.d$

4. $a \perp b \overset{\triangle}{\iff} a$ et b sont premier entre eux (c.-à-d. 1 est leur seul diviseur commun)

$$k^2 \prod_{i=1}^{r} p_i^2 = a^2 = b^2 \prod_{i=1}^{r} p_i$$

$$k^2 \prod_{i=1}^{r} p_i = b^2 \qquad \Longrightarrow \forall i :\ p_i \backslash b^2 \quad \Longrightarrow \forall i :\ p_i \backslash b$$

KO, donc $\prod_{i=1}^{r} \sqrt{p_i} \ \notin \mathbb{Q}$

□

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ est un carré parfait } \iff \sqrt{n} \in \mathbb{Q}}$

Démonstration

$\Rightarrow$) $n = k^2$ avec $k \in \mathbb{N}$, donc $\sqrt{n} = k \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

$\Leftarrow$) Montrons la contraposition,
c.-à-d. que : n n'est pas un carré parfait $\stackrel{?}{\Longrightarrow}$ $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$
Si n n'est pas un carré parfait alors sa forme standard (cf. [Nombres 1])
peut s'écrire comme $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{2\alpha_i+1} \ \prod_{i=1}^{s} q_i^{2\beta_i}$

avec $\left| \begin{array}{l} r \geqslant 1 \\ \text{les } p_i, q_i \text{ distincts} \in \mathbb{P} \end{array} \right.$

donc $\sqrt{n} = \underbrace{\prod_{i=1}^{r} \sqrt{p_i}}_{\notin \mathbb{Q}} \ \underbrace{\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \ \prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i}}_{\in \mathbb{N}_*} \ \notin \mathbb{Q}$

□

$\forall b \in \mathbb{N}+2$:
$x \in \mathbb{R}$ est dit normal en base b si tous les chiffres de x en base b apparaissent avec la "même fréquence", de même pour toutes les séquences de 2 chiffres, 3 chiffres...(les chiffres sont "distribués aléatoirement")

$x \in \mathbb{R}$ est dit normal si $\forall b \in \mathbb{N}+2 :\ x$ est normal en base b

Si π est normal alors "tout" est dans π

La constante de CHAMPERNOWNE 0,1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 ... est normal en base 10

Commentaire personnel

D'après [Wikipédia] :

La constante de COPELAND - ERDÖS [OEIS, A33308] 0,2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 ... est normal en base 10

Presque tous les nombres réels sont normaux

(Émile BOREL)

$\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}, \forall b \in \mathbb{N}+2 :\ x \text{ n'est pas normal en base } b}$

Conjecture de David H. Bailey et Richard E. Crandall (2001) :

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \ x \text{ est algébrique} \overset{?}{\Longrightarrow} x \text{ est normal}}$ Mais on n'en connaît pas !

3.1 Bijection

Il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$:
$$\begin{array}{cccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbf{0} & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & 22 & \dots \end{array}$$

$2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$, mais il y a le "même nombre d'éléments" dans $2\mathbb{N}$ que dans $\mathbb{N}$!

4 Samedi 15 décembre 2007 : Diagonalisation

→ `TheolMachine_BMarchal_04_20071215_1.mp3` (13 Mo) (56'53)
→ `TheolMachine_BMarchal_04_20071215_2.mp3` (11, 4 Mo) (49'49)

$\forall I$ fini : $k := \#I$
$$\begin{array}{cccccc|ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & & & I & & & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{array}$$

$\mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \cup I$ (ils sont isomorphes, c.-à-d. qu'il existe une bijection entre les deux)

$$\boxed{\begin{array}{l} k := \#A = \#B \in \mathbb{N} : \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{il y a } k! \text{ bijections de } A \text{ dans } B \\ \text{il y a } k^k \text{ applications de } A \text{ dans } B \end{array} \right. \end{array}}$$

(P_k : permutations de k éléments)
(α_k^k : arrangements avec répétions de k él. parmi k)

$\boxed{\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Q} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

Soit l'alphabet $A := \{\text{lettre}\}$
Un mot fini sur cet alphabet $A :=$ une suite finie d'éléments de A
$A^\circ := \{\text{mot fini (non vide) sur l'alphabet } A\}$ Ex. : | "vieux_motard" : 1 mot
| "vieux motard" : 2 mots

$A^* := \{\text{mot infini sur l'alphabet } A\}$

Si $A = \{0, 1\}$: $\left| \begin{array}{ll} A^\circ = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, \dots\} & \simeq \mathbb{N} \\ A^* = \{000\dots, 100\dots, \dots\} & \not\simeq \mathbb{N} \end{array} \right.$

Infini dénombrable : $\mathbb{N}$
Puissance du continu : $2^{\mathbb{N}}$

Si $A = \{0\}$: $\left| \begin{array}{ll} A^\circ = \{0, 00, 000, \dots\} \simeq \mathbb{N} & \\ A^* = \{000\dots\} & \#A^* = 1 \end{array} \right.$

$\boxed{A = \{0, 1\} \implies A^* \not\simeq \mathbb{N}}$

Démonstration (par l'absurde)

Supposons que $A^* \simeq \mathbb{N}$, c.-à-d. $\exists$ bijection $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} A^*$

$\forall n \in \mathbb{N} : \; f(n) =: a_n =: (a_{ni})_{i \in \mathbb{N}} \; \in A^*$ (chaque $a_{ni} \in A$)

$$
\begin{array}{c|l}
n & a_n \\
\hline
0 & \underline{a_{00}} \; a_{01} \; a_{02} \; a_{03} \; a_{04} \; a_{05} \; a_{06} \; \ldots \\
1 & a_{10} \; \underline{a_{11}} \; a_{12} \; a_{13} \; a_{14} \; a_{15} \; a_{16} \; \ldots \\
2 & a_{20} \; a_{21} \; \underline{a_{22}} \; a_{23} \; a_{24} \; a_{25} \; a_{26} \; \ldots \\
3 & a_{30} \; a_{31} \; a_{32} \; \underline{a_{33}} \; a_{34} \; a_{35} \; a_{36} \; \ldots \\
4 & a_{40} \; a_{41} \; a_{42} \; a_{43} \; \underline{a_{44}} \; a_{45} \; a_{46} \; \ldots \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Ce tableau contient
tous les éléments de A^*
(ligne par ligne)

1^re^ diagonalisation : $\forall i \in \mathbb{N} : \; b_i := 1 - a_{ii} \in A$ donc $b := (b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A^*$

2^e^ diagonalisation : $\forall i \in \mathbb{N} : \; b_i = 1 - a_{ii} \neq a_{ii}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : \; b \neq a_n$ et $b \notin A^*$ (car b **n'est pas** dans le tableau)

KO $\square$

On peut voir l'informatique comme un "système de preuve" intuitionniste.

$\boxed{\exists x, y \notin \mathbb{Q} : \; x^y \in \mathbb{Q}}$

Démonstration

$y := \sqrt{2} \quad \notin \mathbb{Q}$

Comme $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = 2$

si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ alors $x := \sqrt{2}$ convient sinon $x := \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ convient

Donc $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ ou $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ (on ne sait pas lequel)

$\square$

Commentaire personnel

D'après [Wikipédia] :

Théorème de compacité du calcul propositionnel :

Pour E, un ensemble dénombrable de propositions :
($\forall S$ fini $\subseteq E$: S est non contradictoire) $\implies$ E est non contradictoire

Théorème de Löwenheim - Skolem :

Pour T une théorie du premier ordre :
T admet un modèle infini ou des modèles finis arbitrairement grands
$\implies$ T admet un modèle de chaque cardinal plus grand que celui de T

En particulier :

T est finiment axiomatisable T admet un modèle infini	$\implies$ T admet un modèle dénombrable

Corollaires :
La logique du premier ordre
est strictement "inférieure" à celle du second ordre.

Les théories axiomatiques des ensembles (par ex. ZFC) cohérentes admettent un modèle dénombrable.

Paradoxe [5] de Skolem :
ZFC (si elle est cohérente) admet un modèle dénombrable,
or ZFC contient des ensembles non dénombrables !

"Comment un ensemble non dénombrable pourrait-il être inclus dans une sous-structure dénombrable ?"
"Comme souligné par Skolem, le problème réside dans la relativité de ce qu'on appelle ici *dénombrable*. En théorie des ensembles, un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels. Mais nous avons utilisé cette notion en deux sens différents : les ensemble dénombrables au sens du modèle de ZFC, et les ensemble dénombrables au sens de la théorie intuitive dans laquelle nous avons énoncé le théorème de Löwenheim - Skolem. On peut tout à fait formaliser ce théorème en théorie des ensembles, mais on ne peut faire coïncider le modèle de ZFC dans lequel on a effectué cette formalisation, et celui auquel on applique le théorème. Dans le modèle dénombrable de ZFC obtenu par Lowenheim - Skolem, il existe bien une collection (un ensemble de l'univers de la formalisation) de couples qui établit une bijection entre les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ du modèle, mais comme $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels, n'est pas dénombrable, cette collection n'est pas représentée par un ensemble de ce modèle. Ce n'est même pas une classe. Il n'y a aucun moyen d'en parler dans ce modèle. L'ensemble $\mathbb{R}$ est bien non dénombrable *au sens du modèle*.

Le paradoxe repose sur une interprétation trop « intuitive » de la théorie axiomatique des ensembles, qui est une théorie formelle de l'appartenance au premier ordre, et sur une confusion entre meta-théorie et théorie, réminiscente des paradoxes des théories des ensembles insuffisamment formalisées comme ceux de Richard et de Berry. L'existence, pour tout modèle de ZFC, d'une sous-structure dénombrable élémentairement équivalente, est en fait un résultat utile de théorie des ensembles."

(*Paradoxe de Skolem*/ [Wikipédia], 3 mai 2007)

---

5 Samedi 22 décembre 2007 : Diagonalisation

→ `TheolMachine_BMarchal_05_20071222_1.mp3` (12, 7 Mo) (55'55)
→ `TheolMachine_BMarchal_05_20071222_2_DiagErronee.mp3` (11, 6 Mo) (51'03)

5. "**paradoxe** n.m. (grec *paradoxos*, de *para*, contre, et *doxa*, opinion)
1. Pensée, opinion contraire à l'opinion commune. 2. LOGIQUE Antinomie."
"**antinomie** n.f. (grec *anti*, contre, et *nomos*, loi)
LOGIQUE Contradiction entre deux idées, deux principes, deux propositions.
– Contradiction à l'intérieur d'une théorie déductive ; paradoxe." ([Larousse])

$2 := \{0, 1\}$
$2^{\mathbb{N}} := \{\text{application } f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\}$

$\boxed{2^{\mathbb{N}} \not\simeq \mathbb{N}}$ ($2^{\mathbb{N}}$ est indénombrable)

Démonstration (par l'absurde)
Supposons que $2^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{N}$,
c.-à-d. $\exists$ suite $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ qui énumère les éléments de $2^{\mathbb{N}}$

$\forall i \in \mathbb{N}:$ f_i est une application : $\mathbb{N} \longrightarrow 2$

$$\begin{array}{c|l}
i & f_i \\
\hline
0 & \underline{f_0(0)}\ f_0(1)\ f_0(2)\ f_0(3)\ f_0(4)\ f_0(5)\ f_0(6)\ \ldots \\
1 & f_1(0)\ \underline{f_1(1)}\ f_1(2)\ f_1(3)\ f_1(4)\ f_1(5)\ f_1(6)\ \ldots \\
2 & f_2(0)\ f_2(1)\ \underline{f_2(2)}\ f_2(3)\ f_2(4)\ f_2(5)\ f_2(6)\ \ldots \\
3 & f_3(0)\ f_3(1)\ f_3(2)\ \underline{f_3(3)}\ f_3(4)\ f_3(5)\ f_3(6)\ \ldots \\
4 & f_4(0)\ f_4(1)\ f_4(2)\ f_4(3)\ \underline{f_4(4)}\ f_4(5)\ f_4(6)\ \ldots \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Ce tableau contient
tous les éléments de $2^{\mathbb{N}}$
(ligne par ligne)

1re diagonalisation : soit la fonction g telle que $\forall n \in \mathbb{N}:$ $g(n) = 1 - f_n(n)$
donc $g \in 2^{\mathbb{N}}$

2e diagonalisation : g est dans la liste $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ donc $\exists k \in \mathbb{N}:$ $f_k = g$
Or $f_k(k) = g(k) = 1 - f_k(k)$
donc $f_k(k) = 1/2 \notin 2$ **KO** □

5.1 Nombres cardinaux transfinis

$\aleph_0 := \#\mathbb{N}$, le cardinal de l'infini dénombrable
$\aleph_1 :=$ le plus petit cardinal indénombrable
$2^{\aleph_0} := \#2^{\mathbb{N}} = \#\mathbb{R}$, la puissance du continu

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: \ n < \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots}$

$\boxed{\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}}$

Commentaire personnel

D'après [Wikipédia] :
L'**hypothèse du continu** (HC) dit que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$
(c.-à-d. qu'il n'y a pas d'intermédiaire entre le discret et le continu)
(due à Cantor, c'est le 1er des 23 problèmes de Hilbert)

$\boxed{\text{L'hypothèse du continu est indécidable dans ZF et ZFC}}$

(non réfutable : Gödel, 1938
non démontrable : Cohen, 1963)

"Commencée il y a une trentaine d'années, la recherche d'axiomes « naturels » à ajouter à la théorie de Zermelo - Fraenkel (axiomes de détermination, axiomes de grands cardinaux, etc.) va sans doute permettre, grâce aux travaux de Woodin,

de résoudre prochainement l'hypothèse du continu... par la négative, ce que soupçonnait déjà GÖDEL.
[...]
Historiquement, les mathématiciens en faveur d'une large classe d'ensembles rejettent l'hypothèse du continu, alors que ceux favorables au contraire à une ontologie ensembliste plus restreinte l'acceptent."

(*Hypothèse du continu*/ [Wikipédia], 6 juin 2007)

L'**hypothèse du continu généralisée** (GHC)
dit que $\forall$ ordinal $\alpha :\ \aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$

$\boxed{\text{ZF + GHC} \implies \text{AC}}$ (où AC : axiome du choix)

5.2 Fonctions calculables

(L'ensemble des réels constructifs)
$\mathcal{R} := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}} := \{\mathsf{f} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \,|\, \mathsf{f} \text{ calculable}\} \quad \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$\mathsf{f} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est "intuitivement calculable"
$\overset{\triangle}{\iff}$ "je sais" expliquer en un temps fini comment $\forall n \in \mathbb{N}$ calculer $\mathsf{f}(n)$
$\overset{\triangle}{\iff}$ il existe une explication finie décrivant comment $\forall n \in \mathbb{N}$ calculer $\mathsf{f}(n)$
$\overset{\triangle}{\iff}$ $\exists$ un langage (alphabet A, WF (well formed formulas) $\subseteq A^\circ$),
$\exists y \in \mathit{WF} :\ y$ permet de calculer f

Un langage $L = (A, \mathit{WF})$ est universel (LU)
$\overset{\triangle}{\iff}$ $\forall$ application calculable $\mathsf{f} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,
$\exists y \in \mathit{WF} :\ y$ permet de calculer f

La **thèse de CHURCH** (TC) dit qu'il existe (au-moins) un LU

5.3 Diagonalisation erronée

$\boxed{\text{TC} \overset{\triangle}{\iff} \exists\ \text{LU} \implies \mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}} \simeq \mathbb{N}}$

Démonstration
{application constante} $\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}}$ donc $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}}$ est infini

$\mathit{WF} \simeq \mathbb{N}$
Si $y \in \mathit{WF}$ "calcule" f et $\mathsf{g} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}}$ alors $\mathsf{f} = \mathsf{g}$
Donc $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}} \simeq \mathbb{N}$ □

Exercice : chercher l'**erreur** dans ce qui suit :

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}}$ est infini dénombrable
c.-à-d. $\exists$ suite $(\mathsf{f}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ qui énumère les éléments de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}}$

1^{re} diagonalisation : soit la fonction g telle que $\forall n \in \mathbb{N} : \; g(n) = f_n(n) + 1$
donc $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{calc}$

2^{e} diagonalisation : g est dans la liste $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ donc $\exists k \in \mathbb{N} : \; f_k = g$
Or $f_k(k) = g(k) = f_k(k) + 1$
donc $0 = 1$ KO !

donc en fait $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{calc}$ est indénombrable
donc $\nexists$ LU et $\neg$ TC !

Commentaire personnel

Correction de l'exercice :
g est une application $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bien définie, mais rien ne nous dit qu'elle est calculable ! Donc rien ne nous dit que g doit être dans la liste $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et on ne peut pas conclure par la contradiction.

$\forall n \in \mathbb{N} : \; f_n$ est calculable
c.-à-d. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in WF : \; y_n$ "calcule" f_n
Mais, a priori, on n'a pas un seul y pout tout les f_n,
donc on n'a pas de y pour g

6 Samedi 5 janvier 2008 : Deux exemples de MU

→ `TheolMachine_BMarchal_06_20080105_1.mp3` (11,2 Mo) (49'11)
→ `TheolMachine_BMarchal_06_20080105_2_MachineRegistres.mp3` (14,4 Mo) (1h03'09)

L'erreur à corriger c'est que l'association $n \longrightarrow f_n$ n'est pas "calculable".

Commentaire personnel

D'après [Wikipedia] :
Théorème d'accélération linéaire :

$\forall c \in \mathbb{R}_{>0}, \forall$ machine de Turing M résolvant un problème en $f(n)$,
$\exists$ machine de Turing $M' : M'$ résoud le problème en $cf(n) + n + 2$

C'est pourquoi la complexité en grand O est définie à un facteur constant près.

Théorème d'accélération de Blum (1967) :

? $\forall$ mesure de complexité de Blum (φ, Φ), $\forall f$ calculable $\in E^{A \times B}$,
$\exists g$ calculable $\in 2^{C}, \forall i$ programme de $g, \exists$ programme j de g,
pour presque tout $x : \; f(x, \Phi_j(x)) \leqslant \Phi_i(x)$?

f est appelée fonction d'accélération (Blum's speedup theorem/ [Wikipedia])

"There exists a total computable predicate P such that for any algorithm computing $P(x)$ with running time $T(x)$, there exists another algorithm computing $P(x)$ with computation time $O(\ln T(x))$.
This means that there is no algorithm for the predicate P that is even nearly optimal." (Blum's Speed-Up Theorem)/ [MathWorld])

Et-ce que cela n'est pas seulement valable dans un cadre sans limite de temps, sans notion d'"effort". Hors dans le "monde physique" le temps (l'"effort") n'est pas nécessairement infiniment divisible.

6.1 URM : "coffee bar"

URM (Unlimited Register Machine) :
machine présentée par CUTLAND dans [Computability]
(variante de la machine de [SHEPHERDSON – STURGIS]).

Pour la présentation imagée par un coffee bar cf. *Re: Key Post 1, toward Church Thesis and Lobian machine* [6] (Bruno MARCHAL, 14 décembre 2007, [Everything])

(Le module `urmCutland.py` [7] implémente cette machine sous forme d'une classe Python.)

Soit un ensemble infini de tables dans un café, numérotées $1, 2, 3, \ldots$ et supposées initialement vide. Chaque table peut contenir un nombre quelconque de tasses de café.

Alphabet $A := \{$`Z`, `S`, `T`, `J`, `(`, `)`, `,`, `0`, `1`, `2`, `3`, `4`, `5`, `6`, `7`, `8`, `9`$\}$
(Zero, Successor, Transfer, Jump, ...)

Instructions ($\forall m, n, q \in \mathbb{N}_*$) :
`Z(n)` := enlever toutes les tasses de la table numéro n
`S(n)` := amener une tasse supplémentaire sur la table numéro n
`T(m,n)` := modifier le nombre de tasses de la table numéro n
pour qu'il y en ai autant que sur la table numéro m
`J(m,n,q)` := s'il y a le même nombre de tasses sur la table numéro m
que sur la table numéro n
alors reprendre à partir de l'instruction numéro q
(si il y a une instruction numéro q, sinon arrêter)

Exemple de programme (suite finie d'instructions) :

`1) Z(42)`	vider la table 42
`2) S(49)`	ajouter une tasse sur la table 49
`3) J(42,49,1)`	les tables 42 et 49 n'ont pas le même nombre de tasses

On sait que pour une MU il y a des programmes qui la plante
(qui ne s'arrête jamais)

Plus petit programme qui ne s'arrête jamais :
`1) J(1,1,1)`

6. http://www.mail-archive.com/everything-list@eskimo.com/msg14085.html
7. http://www.opimedia.be/DS/DSPython/index.htm#urmCutland

il y a bien sûr toujours autant de tasses sur la table 1 que sur la table 1,
donc reprendre à partir de l'instruction 1, et ce indéfiniment

On dira que $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est URM-calculable

$\overset{\triangle}{\iff}$ $\exists$ programme qui se termine et
tel que si on met a tasses sur la table numéro 1
alors il y aura $f(a)$ tasses sur la table numéro 1 après exécution

$\forall k \in \mathbb{N}$, on dira que $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^k}$ est URM-calculable

$\overset{\triangle}{\iff}$ $\exists$ programme qui se termine
et tel que si on met $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ tasses
sur les tables numéro $1, 2, 3, \ldots, k$
alors il y aura $f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ tasses
sur la table numéro 1 après exécution

6.2 SK-combinateurs (cf. [Nombres 2])

Alphabet $A := \{S, K, (,)\}$

Syntaxe :
- K est un combinateur
- S est un combinateur
- Si x et y sont des combinateurs alors $(x\,y)$ est un combinateur

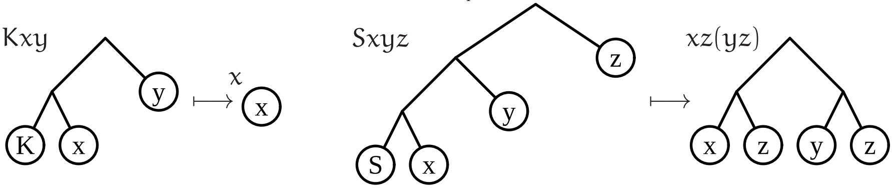
On abrévie le parenthèsage gauche, par ex. $[(a\,b)\,(c\,d)]$ en $ab(cd)$.

Exemples de combinateurs :

$K, S,$
$KK, KS, SK, SS,$
$KKK, KKS, KSK, KSS, SKK, SKS, SSK, SSS,$
$K(KK), K(KS), K(SK), K(SS), S(KK), S(KS), S(SK), S(SS),$
$\ldots$

Sémantique opérationnelle :
$$\begin{array}{|lcl} Kxy & \mapsto & x \\ Sxyz & \mapsto & xz(yz) \end{array}$$

Commentaire personnel



Est TURING-complet.
Est combinatoirement complet
(avec S et K on sait construire tous les combinateurs).

7 Samedi 12 janvier 2008 : URM ; Combinateurs

→ `TheolMachine_BMarchal_07_20080112_1_MachineRegistres.mp3` (10, 5 Mo) (46'07)
→ `TheolMachine_BMarchal_07_20080112_2_Combinateurs.mp3` (16, 6 Mo) (1h12'47)

7.1 URM : "coffee bar"

Commentaire personnel

`T(1,1)` : ne fait rien

q) `J(m,n,q+1)` : ne fait rien

`J(1,1,q)` : s'il y a une instruction numéro q
alors saut inconditionnel vers cette instruction
sinon arrête le programme

Programme qui effectue $a+1$:

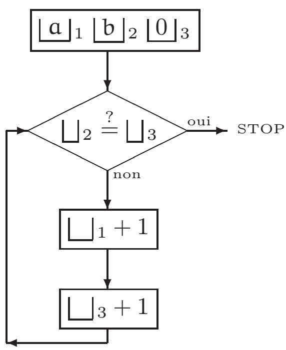
	$\lfloor a \rfloor_1$
1) `S(1)`	$\lfloor a+1 \rfloor_1$

$a-1$:

	$\lfloor a \rfloor_1$		
1) `T(1,3)`	$\lfloor a \rfloor_1$		$\lfloor a \rfloor_3$
2) `Z(1)`	$\lfloor 0 \rfloor_1$		$\lfloor a \rfloor_3$
3) `Z(2)`	$\lfloor 0 \rfloor_1$	$\lfloor 0 \rfloor_2$	$\lfloor a \rfloor_3$
4) `S(2)`	$\lfloor 0 \rfloor_1$	$\lfloor 1 \rfloor_2$	$\lfloor a \rfloor_3$
5) `J(2,3,9)`	si a tasses sur table 2 alors arrêter		
6) `S(1)`	$\lfloor 1 \rfloor_1$	$\lfloor 1 \rfloor_2$	$\lfloor a \rfloor_3$
7) `S(2)`	$\lfloor 1 \rfloor_1$	$\lfloor 2 \rfloor_2$	$\lfloor a \rfloor_3$
8) `J(1,1,5)`	recommencer en 5		
	$\lfloor 2 \rfloor_1$	$\lfloor 3 \rfloor_2$	$\lfloor a \rfloor_3$
	...		
	$\lfloor a-1 \rfloor_1$	$\lfloor a \rfloor_2$	$\lfloor a \rfloor_3$ si $a \geqslant 1$, sinon ne s'arrête jamais

$a+b =$ "$0 +^b (1)$" :

	$\lfloor a \rfloor_1$	$\lfloor b \rfloor_2$	
1) `Z(3)`	$\lfloor a \rfloor_1$	$\lfloor b \rfloor_2$	$\lfloor 0 \rfloor_3$
2) `J(2,3,6)`	si b tasses sur table 3 alors arrêter		
3) `S(1)`	$\lfloor a+1 \rfloor_1$	$\lfloor b \rfloor_2$	$\lfloor 0 \rfloor_3$
4) `S(3)`	$\lfloor a+1 \rfloor_1$	$\lfloor b \rfloor_2$	$\lfloor 1 \rfloor_3$
5) `J(1,1,2)`	recommencer en 2		
	$\lfloor a+2 \rfloor_1$	$\lfloor b \rfloor_2$	$\lfloor 2 \rfloor_3$
	...		
	$\lfloor a+b \rfloor_1$	$\lfloor b \rfloor_2$	$\lfloor b \rfloor_3$



$a.b =$ “$0 +^b(a)$” :

	$\lfloor a \rfloor_1$	$\lfloor b \rfloor_2$			
1) T(2,4)	$\lfloor a \rfloor_1$	$\lfloor b \rfloor_2$		$\lfloor b \rfloor_4$	
2) T(1,2)	$\lfloor a \rfloor_1$	$\lfloor a \rfloor_2$		$\lfloor b \rfloor_4$	
3) Z(1)	$\lfloor 0 \rfloor_1$	$\lfloor a \rfloor_2$		$\lfloor b \rfloor_4$	
4) Z(5)	$\lfloor 0 \rfloor_1$	$\lfloor a \rfloor_2$		$\lfloor b \rfloor_4$	$\lfloor 0 \rfloor_5$
5) J(4,5,13)	si b tasses sur table 5 alors arrêter				
	$\lfloor x \rfloor_1$	$\lfloor a \rfloor_2$			
6) Z(3)					
7) J(2,3,11)	si a tasses sur table 3 alors aller en 11				
8) S(1)					
9) S(3)					
10) J(1,1,7)	recommencer en 7				
	$\lfloor x+a \rfloor_1$	$\lfloor a \rfloor_2$	$\lfloor a \rfloor_3$		
	$\lfloor a \rfloor_1$	$\lfloor a \rfloor_2$	$\lfloor a \rfloor_3$	$\lfloor b \rfloor_4$	$\lfloor 0 \rfloor_5$
11) S(5)	$\lfloor a \rfloor_1$	$\lfloor a \rfloor_2$	$\lfloor a \rfloor_3$	$\lfloor b \rfloor_4$	$\lfloor 1 \rfloor_5$
12) J(1,1,5)	recommencer en 5				
	$\lfloor a.2 \rfloor_1$	$\lfloor a \rfloor_2$	$\lfloor a \rfloor_3$	$\lfloor b \rfloor_4$	$\lfloor 2 \rfloor_5$
	...				
	$\lfloor a.b \rfloor_1$	$\lfloor a \rfloor_2$	$\lfloor \quad \vert a \rfloor_3$	$\lfloor b \rfloor_4$	$\lfloor b \rfloor_5$

$a^b =$ “$1\ .^b(a)$” : ...

F_n :

	$\lfloor n \rfloor_1$				
1) T(1,4)	$\lfloor n \rfloor_1$			$\lfloor n \rfloor_4$	
2) Z(1)	$\lfloor 0 \rfloor_1$			$\lfloor n \rfloor_4$	
3) Z(2)	$\lfloor 0 \rfloor_1$	$\lfloor 0 \rfloor_2$		$\lfloor n \rfloor_4$	
4) S(2)	$\lfloor 0 \rfloor_1$	$\lfloor 1 \rfloor_2$		$\lfloor n \rfloor_4$	
5) Z(5)	$\lfloor 0 \rfloor_1$	$\lfloor 1 \rfloor_2$		$\lfloor n \rfloor_4$	$\lfloor 0 \rfloor_5$
6) J(4,5,16)	si n tasses sur table 5 alors arrêter				
	$\lfloor a \rfloor_1$	$\lfloor b \rfloor_2$			
7) Z(3)					
8) J(2,3,12)	si b tasses sur table 3 alors aller en 12				
9) S(1)					
10) S(3)					
11) J(1,1,8)	recommencer en 8				
	$\lfloor a+b \rfloor_1$	$\lfloor b \rfloor_2$	$\lfloor b \rfloor_3$		
	$\lfloor 1 \rfloor_1$	$\lfloor 1 \rfloor_2$	$\lfloor 1 \rfloor_3$	$\lfloor n \rfloor_4$	$\lfloor 0 \rfloor_5$
12) T(1,2)	$\lfloor 1 \rfloor_1$	$\lfloor 1 \rfloor_2$	$\lfloor 1 \rfloor_3$	$\lfloor n \rfloor_4$	$\lfloor 0 \rfloor_5$
13) T(3,1)	$\lfloor 1 \rfloor_1$	$\lfloor 1 \rfloor_2$	$\lfloor 1 \rfloor_3$	$\lfloor n \rfloor_4$	$\lfloor 0 \rfloor_5$
14) S(5)	$\lfloor 1 \rfloor_1$	$\lfloor 1 \rfloor_2$	$\lfloor 1 \rfloor_3$	$\lfloor n \rfloor_4$	$\lfloor 1 \rfloor_5$
15) J(1,1,6)	recommencer en 6				
	$\lfloor 1 \rfloor_1$	$\lfloor 2 \rfloor_2$	$\lfloor 1 \rfloor_3$	$\lfloor n \rfloor_4$	$\lfloor 2 \rfloor_5$
	...				
	$\lfloor F_n \rfloor_1$	$\lfloor F_{n+1} \rfloor_2$	$\lfloor \quad \vert F_n \rfloor_3$	$\lfloor n \rfloor_4$	$\lfloor n \rfloor_5$

Nombres de Fibonacci :

$$F_0 := \mathbf{0}$$
$$F_1 := \mathbf{1}$$
$$\forall n \in \mathbb{Z} : F_n := F_{n-2} + F_{n-1}$$ [OEIS, A000045]

Factorielle

$n! := \prod_{i=1}^{n} i$: [OEIS, A000142]

	$\lfloor n \rfloor_1$					
1) `T(1,6)`	$\lfloor n \rfloor_1$					$\lfloor n \rfloor_6$
2) `Z(1)`	$\lfloor 0 \rfloor_1$					$\lfloor n \rfloor_6$
3) `S(1)`	$\lfloor 1 \rfloor_1$					$\lfloor n \rfloor_6$
4) `Z(2)`	$\lfloor 1 \rfloor_1$	$\lfloor 0 \rfloor_2$				$\lfloor n \rfloor_6$
5) `J(2,6,21)`	si n tasses sur table 2 alors arrêter					
6) `S(2)`	$\lfloor 1 \rfloor_1$	$\lfloor 1 \rfloor_2$				$\lfloor n \rfloor_6$
	$\lfloor x \rfloor_1$	$\lfloor y \rfloor_2$				
7) `T(2,4)`						
8) `T(1,2)`						
9) `Z(1)`						
10) `Z(5)`						
11) `J(4,5,19)`	si y tasses sur table 5 alors aller en 19					
12) `Z(3)`						
13) `J(2,3,17)`						
14) `S(1)`						
15) `S(3)`						
16) `J(1,1,13)`	recommencer en 13					
17) `S(5)`						
18) `J(1,1,11)`	recommencer en 11					
	$\lfloor x.y \rfloor_1$	$\lfloor x \rfloor_2$	$\lfloor x \rfloor_3$	$\lfloor y \rfloor_4$	$\lfloor y \rfloor_5$	
	$\lfloor 1 \rfloor_1$	$\lfloor 1 \rfloor_2$	$\lfloor 1 \rfloor_3$	$\lfloor 1 \rfloor_4$	$\lfloor 1 \rfloor_5$	$\lfloor n \rfloor_6$
19) `T(4,2)`	$\lfloor 1 \rfloor_1$	$\lfloor 1 \rfloor_2$	$\lfloor 1 \rfloor_3$	$\lfloor 1 \rfloor_4$	$\lfloor 1 \rfloor_5$	$\lfloor n \rfloor_6$
20) `J(1,1,5)`	recommencer en 5					
	$\lfloor 2 \rfloor_1$	$\lfloor 2 \rfloor_2$	$\lfloor 1 \rfloor_3$	$\lfloor 2 \rfloor_4$	$\lfloor 2 \rfloor_5$	$\lfloor n \rfloor_6$
	$\lfloor 6 \rfloor_1$	$\lfloor 3 \rfloor_2$	$\lfloor 2 \rfloor_3$	$\lfloor 3 \rfloor_4$	$\lfloor 3 \rfloor_5$	$\lfloor n \rfloor_6$
	...					
	$\lfloor n! \rfloor_1$	$\lfloor n \rfloor_2$	$\lfloor (n-1)! \rfloor_3$	$\lfloor n \rfloor_4$	$\lfloor n \rfloor_5$	$\lfloor n \rfloor_6$

D'après le chapitre *1. Computable functions* de [Computability] (Cutland) :
Les registres sont notés $R_1, R_2, R_3, \ldots$ $\quad \lfloor r_1 \rfloor_{R_1} \ \lfloor r_2 \rfloor_{R_2} \ \lfloor r_3 \rfloor_{R_3} \ \ldots$
Leur valeur sont notées $r_1, r_2, r_3, \ldots$ (initialement égales à 0)

Le contenu de ces registres peut être modifié par l'URM en réponse aux 4 instructions qu'elle reconnaît : `Z`, `S`, `T` et `J`.

Un programme P est une suite finie de telles instructions : $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_s$

Une configuration initiale $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_*}$ correspond aux valeurs des registres $(r_i)_{i \in \mathbb{N}_*}$ avant l'exécution d'un programme. Si le programme se termine, la valeur des registres $(r_i)_{i\in\mathbb{N}_*}$ après exécution du programme est appelée configuration finale.

$\forall$ programme $P, \forall(a_i)_{i\in\mathbb{N}_*} \subseteq \mathbb{N}$:
$P(a_1, a_2, a_3, \dots)$ représente l'exécution du programme P
à partir de la configuration initiale $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_*}$
$P(a_1, a_2, a_3, \dots)\downarrow$ signifie que l'exécution de $P(a_1, a_2, a_3, \dots)$ se termine
$P(a_1, a_2, a_3, \dots)\uparrow$ signifie que l'exécution de $P(a_1, a_2, a_3, \dots)$ ne s'arrête pas

$\forall k \in \mathbb{N}_*$:
$P(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)\downarrow := P(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, 0, 0, 0, \dots)\downarrow$ (converge)
$P(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)\uparrow := P(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, 0, 0, 0, \dots)\uparrow$ (diverge)

$\forall$ programme $P, \forall k \in \mathbb{N}_*, \forall$ fonction $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}, \forall a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, b \in \mathbb{N}$:

$$P(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)\downarrow b \overset{\triangle}{\iff} \left| \begin{array}{l} P(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)\downarrow \\ \text{la configuration finale est telle que } r_1 = b \end{array} \right.$$

$\forall$ programme $P, \forall k \in \mathbb{N}_*, \forall$ fonction $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$:
P URM-calcule f

$$\overset{\triangle}{\iff} \forall a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, b \in \mathbb{N} : \quad P(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)\downarrow b \iff \left| \begin{array}{l} (a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) \in \operatorname{dom} f \\ f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) = b \end{array} \right.$$

$$\boxed{\forall \text{ programme } P, \forall k \in \mathbb{N}_*, \exists! \text{ fonction } f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N} : P \text{ URM-calcule } f}$$

Notons $f_{P,k}$ cette unique fonction.

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \text{ programme } P, \forall k \in \mathbb{N}_*, \forall a_1, a_2, a_3, \dots, a_k \in \mathbb{N} : \\ \quad P(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)\downarrow \iff (a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) \in \operatorname{dom} f_{P,k} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \text{ programme } P, \forall k \in \mathbb{N}_*, \forall a_1, a_2, a_3, \dots, a_k \in \mathbb{N} : \ f_{P,k}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) \\ \quad = \begin{cases} \text{l'unique } b \text{ tel que } P(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)\downarrow b & \text{si } P(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)\downarrow \\ \text{indéfinie} & \text{si } P(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)\uparrow \end{cases} \end{array}}$$

$\forall k \in \mathbb{N}_*, \forall$ fonction $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$:

$$f \text{ est URM-calculable} \overset{\triangle}{\iff} \exists \text{ programme } P : \ P \text{ URM-calcule } f$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}_*, \forall \text{ fonction URM-calulable } f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}, \overset{\infty}{\exists} \text{ programme } P : \\ \quad P \text{ URM-calcule } f \end{array}}$$

$$\boxed{\forall \text{ programme } P \text{ sans instruction } J, \exists k \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N} : \ f_{P,1}(a) = k \text{ ou } a + k}$$

Démonstration
Le seul moyen de modifier R_1 est d'exécuter une instruction du style `Z(1)`, `S(1)` ou `T(m,1)`.

Si $\mathtt{P}$ contient ne contient ni $\mathtt{Z(1)}$ ni $\mathtt{T(m,1)}$
alors $f_{P,1}(a) = a + k$ avec $k =$ le nombre d'instructions $\mathtt{S(1)}$

Si la dernière instruction du style $\mathtt{Z(1)}$ ou $\mathtt{T(m,1)}$ est $\mathtt{Z(1)}$
alors $f_{P,1}(a) = k$ avec $k =$ le nombre d'instructions $\mathtt{S(1)}$
après cette dernière instruction

Si la dernière instruction du style $\mathtt{Z(1)}$ ou $\mathtt{T(m,1)}$ est $\mathtt{T(m,1)}$
alors $f_{P,1}(a) = k$ avec $k = r_m +$ le nombre d'instructions $\mathtt{S(1)}$
après cette dernière instruction □

$\boxed{\overset{\infty}{\forall} k \in \mathbb{N}_* :\ r_k = 0}$

Démonstration
Un programme ne contenant qu'un nombre fini d'instructions, il ne peut modifier qu'un nombre fini de registres. Donc il ne peut exister qu'un nombre fini de registres différents de 0. □

$\forall n \in \mathbb{N}_*, \overset{\infty}{\forall} k \in \mathbb{N}_*$:
on peut remplacer chaque $\mathtt{Z(n)}$ par l'instruction $\mathtt{T(k,n)}$

$\forall m, n \in \mathbb{N}_*$: on peut remplacer chaque $\mathtt{T(m,n)}$
par quelques instructions $\mathtt{Z}$, $\mathtt{S}$ et $\mathtt{J}$

Démonstration

q)	$\mathtt{J(1,1,i)}$	peut remplacer q) $\mathtt{T(m,n)}$
...		
i)	$\mathtt{Z(n)}$	avec $i \in \mathbb{N}_*$: $i, i+1, i+2$ et $i+3$ étaient des numéros (d'instruction) inutilisés
$i+1$)	$\mathtt{J(m,n,q+1)}$	
$i+2$)	$\mathtt{S(n)}$	
$i+3$)	$\mathtt{J(1,1,i+1)}$	□

$\forall k \in \mathbb{N}_*, \forall a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k \in \mathbb{N}, \forall$ prédicat k-aire $M(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$:
Fonction caractéristique $c_M : \mathbb{N}^k \longrightarrow 2$
$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) \longmapsto |M(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)|$

On ne considère que les c_M totales.

$M(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ est décidable
$\overset{\triangle}{\iff} c_M(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ est URM-calculable

Un codage d'un domaine $\mathcal{D}$ est une injection exlicite et effective $\alpha : \mathcal{D} \xrightarrow{-} \mathbb{N}$
On dit que $d \in \mathcal{D}$ est codé par le naturel $\alpha(d)$

$\forall$ fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$: f est codée par $f^\star := \alpha \circ f \circ \alpha^{-1}$

$\forall$ fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$: f est URM-calculable $\overset{\triangle}{\iff}$ $f^\star$ est URM-calculable

7.2 SK-combinateurs

$\mathsf{KKKKKK} \mapsto \mathsf{KKKK} \mapsto \mathsf{KK}$
$\mathsf{SSSS} \mapsto \mathsf{SS(SS)}$

On dit qu'un combinateur est stable si il ne se transforme pas.

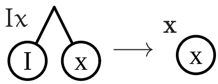
On peut évaluer certains combinateurs suivant différents chemins :
$\mathsf{K(KSS)K} \mapsto \mathsf{(KSS)} \mapsto \mathsf{S}$
ou $\mapsto \mathsf{K\ S\ K} \mapsto \mathsf{S}$

Si l'évaluation d'un combinateur termine, alors toutes les évaluations de ce combinateur qui terminent aboutissent au même résultat.

Trouver un combinateur I tel que $\forall$ combinateur x : $\mathrm{I}x \to x$
Pour trouver, on "remonte" : x

$\mathsf{K}xy$ (pour n'importe quel y)
$\mathsf{K}x(zx)$ (pour n'importe quel z)
$\mathsf{SK}zx$

Et donc $\mathrm{I} := \mathsf{SKK}$ convient.
On a bien : $\mathsf{SKK}x \mapsto \mathsf{K}x(\mathsf{K}x) \mapsto x$



Règle d'extensionnalité : $\boxed{\dfrac{xz = yz}{x = y}}$

8 Samedi 19 janvier 2008 : Combinateurs

→ `TheolMachine_BMarchal_08_20080119_1_SKCombinateurs.mp3` (17 Mo) (1h14'36)
→ `TheolMachine_BMarchal_08_20080119_2_Combinateurs.mp3` (8,26 Mo) (36'05)

Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to its Use and Abuse
et *Inexhaustibility* (Torkel Franzén)

Le théorème de Gödel est parfois utilisé pour avancer que l'homme n'est pas une machine. L'argument "marche tellement bien" que de cette façon, même les machines peuvent prouver qu'elles ne sont pas des machines !

(Calcul des contractions, calcul des conversions, calcul des réductions...)

Commentaire personnel

Les combinateurs, sont-ils les représentations *symboliques* en S et K (ou autres) ou sont-ils les *objets* auxquelles elles renvoient ?

8.1 SK-combinateurs

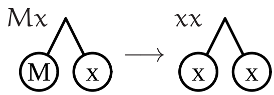
Trouver un combinateur qui n'arrête jamais de se transformer.

Cherchons d'abord un M tel que $Mx \rightarrow xx$:

Utilisons S qui duplique : $Syzx \mapsto yx(zx)$

donc $\mathrm{SII}x \mapsto \mathrm{I}x(\mathrm{I}x) \rightarrow x(\mathrm{I}x) \rightarrow xx$

$M := \mathrm{SII}$



Et donc le combinateur suivant ne s'arrête jamais :

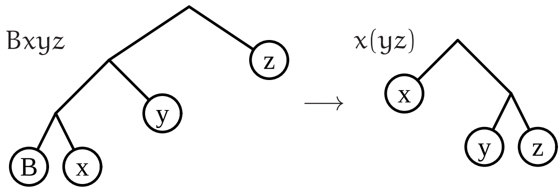
$$MM = \mathrm{SII(SII)} \mapsto \mathrm{I(SII)\,[I(SII)]} \rightarrow \mathrm{SII\,[I(SII)]}$$
$$\rightarrow \mathrm{SII(SII)} = MM \rightarrow MM \rightarrow \ldots$$
$$\text{ou} \rightarrow \mathrm{I\,[I(SII)]\,\{I\,[I(SII)]\}} \rightarrow \mathrm{I(SII)\,\{I\,[I(SII)]\}} \rightarrow \ldots$$

Isomorphisme de Curry-Howard :

combinateurs typés $\longleftrightarrow$ calcul propositionnel

Si on se donne les B, C et W suivants :

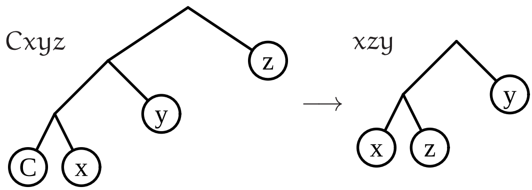
B tel que $Bxyz \rightarrow x(yz)$



Permutateur régulier

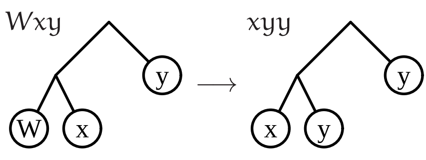
(ne touche pas à son 1[er] arg.)

C tel que $Cxyz \rightarrow xzy$



Warbler (fauvette, oiseau gazouilleur) :

W tel que $Wxy \rightarrow xyy$

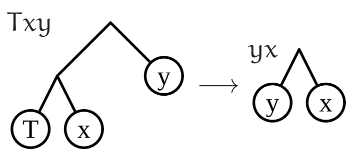


On peut écrire T et M :

T tel que $Txy \rightarrow yx$

$T = \mathrm{CI}$

$Txy = \mathrm{CI}xy \rightarrow \mathrm{I}yx \rightarrow yx$



$M = W\mathrm{I}$

$Mx = W\mathrm{I}x \rightarrow \mathrm{I}xx \rightarrow xx$

8.2 BCWI-combinateurs

On prend donc la syntaxe suivante, et la sémantique correspondante :

> B est un combinateur
> C est un combinateur
> W est un combinateur
> I est un combinateur
> Si x et y sont des combinateurs alors $(x\,y)$ est un combinateur

On ne peut y définir K.

N'est pas combinatoirement complet.
Est TURING universel (langage de programmation complet).

8.3 BCWK-combinateurs

Est combinatoirement complet.
Est TURING universel.

8.4 BCI-combinateurs

Ni éliminateur, ni duplicateur. Donne quand même une structure très riche, parfois appelé calcul lambda linéaire : $\lambda x\,.$ (quelque chose avec x)

(implication stricte de CHURCH)

8.5 Équations diophantiennes

Une équation diophantienne est une égalité entre deux polynômes à coefficients entiers dont on recherche les **solutions entières**.

MATIYASEVICH a montré que la résolution générale des équations diophantiennes (10e problème de HILBERT) est un problème indécidable.
C'est la même chose sur les naturels.
Sur les rationels la question reste posée.

Sur les réels, il existe des formalisations complètes et décidables. Donc ce n'est pas universel. Mais si on ajoute la fonction sin, on récupère l'universalité. sin réintroduit les naturels.

Commentaire personnel

8.6 Récapitulation et anticipation

D'après *SUMMARY (was: OM = SIGMA_1)*[8]

(Bruno MARCHAL, 18 janvier 2008, [Everything])

8. http://www.mail-archive.com/everything-list@eskimo.com/msg14146.html

8.6.1 Diagonale de Cantor

$\boxed{\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \not\simeq \mathbb{N}}$ ($\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, est indénombrable)

Démonstration (par l'absurde)

Supposons $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{N}$

$$\exists \text{ bijection } \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ \hline 0 & \longmapsto & f_0 \\ 1 & \longmapsto & f_1 \\ 2 & \longmapsto & f_2 \\ 3 & \longmapsto & f_3 \\ \dots & & \dots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline \underline{f_0(0)} & f_0(1) & f_0(2) & f_0(3) & \dots \\ f_1(0) & \underline{f_1(1)} & f_1(2) & f_1(3) & \dots \\ f_2(0) & f_2(1) & \underline{f_2(2)} & f_2(3) & \dots \\ f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & \underline{f_3(3)} & \dots \\ & & \dots & & \end{array}$$

1re diagonalisation :
Soit l'"antidiagonale" g telle que $\forall n \in \mathbb{N} : \ g(n) := f_n(n) + 1$
$\forall n \in \mathbb{N} : \ g(n) \in \mathbb{N}$ donc $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (g est dans le tableau)
donc $\exists k \in \mathbb{N} : \ f_k = g$

2e diagonalisation :
En particulier $f_k(k) = g(k) = f_k(k) + 1$
donc $0 = 1$ **KO** (un tableau avec *toutes* ces applications est impossible) $\square$

8.6.2 Existe-t-il une machine digitale universelle ?

$\forall$ fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$:
f est calculable (*computable*) $\overset{\triangle}{\iff}$ $\exists$ langage formel L,
$\exists$ description finie dans $L, \forall n \in \operatorname{dom} f$:
cette description permet de calculer $f(n)$
en un temps fini

Appelons "code" de f dans L une telle description.

$\forall$ langage formel L :
L est universel (LU) $\overset{\triangle}{\iff}$ $\forall f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ calculable, $\exists$ un code de f dans L

$\forall$ machine M :
M est universelle (MU) $\overset{\triangle}{\iff}$ $\exists$ langage universel L : M comprend L

$\boxed{\forall \text{ machine universelle } M, \forall f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ calculable} : \ M \text{ peut calculer } f}$

"Platonia" : "endroit" où l'on peut toujours
demander plus de temps et d'espace mémoire

La thèse de Church (TC) $\overset{\triangle}{\iff}$ $\exists$ langage universel
$\overset{\triangle}{\iff}$ $\exists$ machine universelle [9]
why ? $\implies$ le calcul λ est universel why ?

---

9. $\sim$ Si il ne s'agit pas d'existence effective (dans le sens commun, qui existe "réellement") c'est une existence *relative* à ce qui est implicitement considéré. On perd l'*absolu* visé ! N'y a-t-il pas une circularité dans cette définition ?

L'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ calculables :
${\color{red}\mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}}} := \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \,|\, f \text{ est calculable}\} \quad \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$\boxed{\text{TC} \implies \mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}} \simeq \mathbb{N}}$ donc TC $\implies \mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$
(il y a des applications non calculables)

Démonstration
$\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \,|\, f \text{ est constante}\} \subseteq \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \,|\, f \text{ est calculable}\}$ donc $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}}$ est infini

TC $\implies \exists$ langage universel L
$\{\text{code dans } L\} \subseteq \{\text{expression (bien ou mal formée) de } L\} \simeq \mathbb{N}$ □

Si $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}} \simeq \mathbb{N}$
$\exists$ bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}} \\ \hline 0 & \longmapsto & f_0 \\ 1 & \longmapsto & f_1 \\ 2 & \longmapsto & f_2 \\ 3 & \longmapsto & f_3 \\ \dots & & \dots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline \underline{f_0(0)} & f_0(1) & f_0(2) & f_0(3) & \dots \\ f_1(0) & \underline{f_1(1)} & f_1(2) & f_1(3) & \dots \\ f_2(0) & f_2(1) & \underline{f_2(2)} & f_2(3) & \dots \\ f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & \underline{f_3(3)} & \dots \\ & & \dots & & \end{array}$$

Soit l'"antidiagonale" g telle que $\forall n \in \mathbb{N} : \ g(n) := f_n(n) + 1$
$\forall n \in \mathbb{N} : \ g(n) \in \mathbb{N}$ donc $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Si on commet l'**erreur** de dire que g est calculable alors on en déduit que g est dans le tableau puis $0 = 1$, KO.
On en déduirait alors par l'absurde que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}} \not\simeq \mathbb{N}$
donc TC serait fausse
donc il n'existerait pas de LU
donc il n'existerait pas de MU

Mais g n'est pas calculable, car la bijection $n \longmapsto f_n$ n'est pas "calculable"[10].

L'ensemble des fonctions (totales ou partielles) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ calculables :
$\mathcal{F}_{\text{calc}} := \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \,|\, f \text{ est calculable}\}$ $\quad \boxed{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}_{\text{calc}} \subset \mathcal{F}_{\text{calc}} \subseteq \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\}}$

$\boxed{\text{TC} \implies \mathcal{F}_{\text{calc}} \simeq \mathbb{N}}$

Si $\mathcal{F}_{\text{calc}} \simeq \mathbb{N}$
$\exists$ bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{F}_{\text{calc}} \\ \hline 0 & \longmapsto & f_0 \\ 1 & \longmapsto & f_1 \\ 2 & \longmapsto & f_2 \\ 3 & \longmapsto & f_3 \\ \dots & & \dots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline \underline{f_0(0)} & f_0(1) & f_0(2) & f_0(3) & \dots \\ f_1(0) & \underline{f_1(1)} & f_1(2) & f_1(3) & \dots \\ f_2(0) & f_2(1) & \underline{f_2(2)} & f_2(3) & \dots \\ f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & \underline{f_3(3)} & \dots \\ & & \dots & & \end{array}$$

Soit l'"antidiagonale" g telle que $\forall n \in \mathbb{N} : \ g(n) := f_n(n) + 1$
Donc $g \in \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\}$

10. En fait on n'a pas défini la notion de *calculable* sur les fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. L'application $n \longmapsto f_n(n)$ n'est pas calculable.

Si g est calculable alors $g \in \mathcal{F}_{\text{calc}}$ (g est dans le tableau)
donc $\exists k \in \mathbb{N} : \ f_k = g$

Or $f_k(k) = g(k) = f_k(k) + 1$
mais $f_k = g$ n'étant pas nécessairement défini en k
on **ne peut pas conclure** par une contradiction…
Donc la possibilité d'un LU demeure.

Une machine universelle calcule aussi des fonctions partielles

Une machine ne peut-être à la fois saine (*secure*) et universelle[11]

La sécurité jouera un rôle pour la notion de 1-persone.
L'universalité jouera un rôle pour la notion de 3-machine.

Le calcul λ à exactement la même classe de fonctions calculables que :
les SK-combinateurs, les fonctions (générales ?) récursives,
? la machine de Turing, l'URM de Cutland, ?
Lisp, Scheme, OCaml, Haskell,
FORTRAN, C, C^{++}, Java, Python, PostScript,
le jeu de la vie (de Conway)…

Un système équivalent à ceux-ci est dit Turing-équivalent
(ou Turing-complet).

Résultat absolu d'indécidabilité (*unsolvability*) :

Si TC, soit L un langage universel :
? $\nexists$ machine $M, \forall$ code c dans L : M décide si c correspond à ?
une application ou une fonction partielle

Démonstration (par l'absurde)
Si il en existait une, cela permettrait d'obtenir "mécaniquement" le sous-ensemble des applications calculables en les séparant des fonctions partielles calculables parmi l'énumération des fonctions calculables : $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$ Ce qui mènerait à la contradiction par diagonalisation. □

Résultat (relatif) d'incomplétude :

Si TC :
? $\nexists$ théorie correcte T à propos des machines, $\forall$ affirmation P : ?
P est prouvable dans T

Démonstration (par l'absurde)
Si il existait une telle théorie, cela permettrait de construire une machine contredisant le résultat d'indécidabilité. □

Si TC, soit L un langage universel :

11. sécurité >< universalité $\overset{?}{\simeq}$ cohérence >< complétude

$\forall$ théorie correcte $\mathsf{T}, \exists$ proposition P (du genre “la i^e expression dans L est le code d’une fonction partielle”) : P est vraie et indécidable dans T

Si on ajoute P à T pour former T' : P est bien sûr prouvable dans T'.
C’est pourquoi l’incomplétude est relative
(il n’y a pas d’équivalent de TC pour la prouvabilité).

$\boxed{\text{TC} \implies 1^{\text{er}} \text{ théorème d'incomplétude de GÖDEL}}$

La sous-universalité est d’une manière ou d’une autre
le plus près que l’on puisse approcher de l’universalité sans perdre la sanité.

8.6.3 Machines löbiennes, qui et que sont-elles ?

La prouvabilité est relative. [12]

Mais rien n’empêche (ne semble empêcher)
une certaine théorie universelle pour la calculabilité.

On peut construire une telle théorie à partir de n’importe quelle *formal logical specification* d’un langage universel.

“*Such specifications will give our “absolute ontic TOE”, and defines the absolute measure on the Observer Moments from which we will derive the physical laws (just to test such theories with the empirical facts).*
But the physics will not belong to the “absolute ontic TOE”. Physics will appears to belong to the “categorie de l’entendement [13]*” would say* KANT, *I mean physics appears as a particular view by internal observers appearing in the “absolute ontic TOE”.*”

La notion d’observateur est la machine löbienne.

Machine löbienne :
machine universelle qui sait (dans un sens faible) qu’elle est universelle

Ces machines se savent incomplètes. Ce qui permet une progression infinie. Certaines logiques modales (les hypostases) restent invariantes dans cette progression pour construire la physique computationnaliste.

8.6.4 La 1-personne et la 3-machine

Dualité irréductible (si COMP) entre ces deux points de vue.

12. N’est-ce pas dû à la notion de vérité considérée, qui est relative à la machine ? Hors le discours de la machine sur le monde “réel” est vrai ou pas, correspond ou non à ce monde.

13. D’après *Kant ou l’invention de la liberté* (Bertrand VERGELY) :
Entendement : source intellectuelle de la connaissance, lui fournissant des concepts.
Concept : instrument intellectuel permettant d’unifier la diversité des impressions provenant de la sensibilité.
Sensibilité : donne les intuitions fournissant la **matière** (aspect sensible des objets de la **nature**, c.-à-d. de l’ensemble des phénomènes, de ce qui apparaît, se manifeste dans le sensible) de la connaissance, par opposition à l’entendement, qui par ses concepts en fournit la **forme** (aspect intelligible des objets de la nature).

8.6.5 Théologie des machines löbiennes

La 1-personne et la 3-machine sont simplement deux interprétations arithmétiques des 8 hypostases (points de vue) de PLOTIN.

Cf. *A Purely Arithmetical, yet Empirically Falsifiable, Interpretation of Plotinus' Theory of Matter* [14] (Bruno MARCHAL)

Pour chaque machine, ces hypostases arithmétiques définissent leur théologie :
Propositional (self) "théologie" : principalement donnée par G
Propositional (self) "science" : principalement donnée par G^*
Propositional théologie pure : donnée par $G^* \backslash G$

8.6.6 Physiques des machines löbiennes

Simplement les hypostases particulières correspondant intuitivement à la matière qui émerge, comme expliqué par l'argument du *dovetailer* universel.

8.6.7 Éthiques des machines löbiennes

Considère seulement l'éthique de la machine löbienne computationnaliste : le droit de "dire non au docteur" (celui qui "peut" nous dupliquer).

Le computationnalisme est d'une manière ou d'une autre une religion qui explique pourquoi elle est une "religion" et pourquoi elle ne peut être utilisée pour contraindre les gens.

---

9 Samedi 26 janvier 2008 : Équations diophantiennes ; Combinateurs

→ `TheolMachine_BMarchal_09_20080126_1_EqDioph.mp3` (13, 9 Mo) (1h00'59)
→ `TheolMachine_BMarchal_09_20080126_2_Combinateurs.mp3` (11, 1 Mo) (48'52)

Infinity

Machine robinsonnienne…
Machine loebienne…

Une machine ne peut distinguer une machine un peu plus maligne qu'elle d'une machine divine.

Commentaire personnel

~ raison de ne pas croire les croyants

Article de Slavoj ŽIŽEK dans *La Cause freudienne* n°29, à partir du film *Blade Runner*.

14. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal//publications/CiE2007/SIENA.pdf

Il comprend que revendiquer être une machine c'est l'affirmation d'une grande liberté.

Commentaire personnel

"« Total Recall » *: le savoir dans le réel*

Pour revenir au film noir, disons que c'est ce vide, tenant lieu de l'irréductible béance entre le Je de l'aperception et la « Chose qui pense » nouménale, qui ouvre la possibilité d'une attitude « paranoïaque » pour laquelle, nouménalement – en tant que « Chose qui pense » –, je suis un artefact, un jouet entre les mains d'un invisible Créateur. La dernière personnification de cette figure apparaît dans le renouvellement du film noire des années quatre-vingt sous la forme d'un nouveau type de père – caractéristique du capitalisme tardif, « post-industriel », celui des groupes financiers –, un père incarné par Tyrell dans *Blade Runner*, personnage solitaire d'une matérialité étrange, inquiétante, éthérée, fragile, sans partenaire sexuel. Il matérialise explicitement le malin génie de DESCARTES ; un père qui exerce sur moi son pouvoir, non pas au plan de mon identité symbolique mais de celui de ce que je suis en tant que « Chose qui pense ». En d'autres termes, un père qui n'est plus un S_1, un signifiant-maître dont le nom garantit mon identité symbolique, ma place dans le tissu de la tradition, mais un S_2, un savoir qui m'a créé comme un artefact. Et dès que le père passe ainsi de son statut de S_1 à celui de S_2, du signifiant-maître vide au savoir, Je, le fils, devient un monstre.

[...] je ne suis rien d'autre qu'un « mutant », c'est-à-dire que ce qui fait de moi un être « humain » et non pas un mutant ne peut nullement s'appréhender dans le « réalité ». [...] où est le cogito, la place de la conscience-de-soi, quand tout ce que je suis réellement est artefact – et pas seulement mon corps, mes yeux, mais aussi mes souvenirs et mes fantasmes les plus intimes ?

[...] ce n'est que lorsque j'assume mon statut de mutant au niveau de l'énoncé qu'au niveau niveau de l'énonciation, je deviens vraiment un être humain. « Je suis un mutant » est l'affirmation du sujet dans toute sa pureté [...]

[...] Bien que leurs souvenirs les plus intimes ne soient pas « vraies » mais seulement implantés, ils se subjectivisent en organisant ces souvenirs en un mythe, une narration qui leur permet de se forger une place dans l'univers symbolique. Et puis, nos souvenirs « humains » ne sont-ils pas aussi « implantés », au sens où nous empruntons tous les éléments de nos mythes individuels au trésor des signifiants de l'Autre ? Ne sommes-nous pas, avant même que nous vienne la parole, *parlés* par le discours de l'Autre ? Quand à la vérité de nos souvenirs, n'a-t-elle pas, comme l'écrit LACAN, structure de fiction ? [...] Cependant, ce que LACAN a en tête avec le cogito est *exactement l'opposé de ce genre de subjectivation* : le « sujet » comme $\$$ n'émerge pas par subjectivation-fictionnalisation, soit par le « mythe individuel » qu'il construit avec les morceaux épars de la tradition ; bien plutôt vient-il au jour *au moment même où l'individu perd le support du réseau symbolique de la tradition.* Il coïncide avec le vide qui reste quand le cadre de la mémoire symbolique est mis en suspens. [...]

Alors, les ordinateurs pensent-ils ou non ? La réponse tient précisément à cette logique de la métaphore inversée où, au lieu de concevoir l'ordinateur comme un modèle du cerveau humain, on conçoit le cerveau lui-même comme un « ordinateur fait de chair et de sang » ; où, au lieu de définir le robot comme un homme artificiel, on définit l'homme lui-même comme un « robot naturel ». [...]

[...] Ce que nous éprouvons comme la « réalité » est constitué d'une telle conversion : comme le dit LACAN, la « réalité » est toujours formé par un fantasme. Pour que l'on éprouve quelque chose de réel comme une part de « réalité », il faut que cela s'adapte aux coordonnées prédéterminées de notre espace fantasmatique [...] seconde définition du réel : un surplus, un noyau dur qui résiste à tout processus de modélisation, de simulation ou de métaphorisation.

[...] Le fait qu'« ordinateur ne pense pas » veut dire que le prix à payer pour accéder à la « réalité » est qu'*il faut que quelque chose demeure impensé*."

(*Lettres, etc.* in *La Cause freudienne* n°29 : *Les troubles de la perception*/ Slavoj ŽIŽEK)

"Les réplicants n'ont a priori aucune forme d'empathie entre eux et envers les autres... [...]
Le film s'attache à montrer subtilement que les chasseurs de réplicants n'éprouvent pas beaucoup plus d'empathie que les réplicants eux-mêmes. Mais cet aspect des choses n'est pas perçu tout de suite par le héros.
[...]
Les androïdes sont mus uniquement par leur recherche de la vérité et essaient de trouver les explications sur eux-mêmes dans une profonde quête initiatique. Ils cherchent un moyen de vivre plus longtemps et gravissent un à un les échelons vers la connaissance, mais leur destin (la mort) les rattrape... En effet, au fil des années, ils semblent développer des sentiments et prennent conscience de leur propre fin "programmée"..."

(*Blade Runner* (film)/ [Wikipédia], 14 février 2008)

"Le présent ne sera jamais que des souvenirs."

(*Définitions, États d'Âme, Contresens et Sens Contraires*/ Johnny FIVE)

9.1 Équations diophantiennes

$3x^2yz + 71y^2 - 24x - 5 = 0$

DIOPHANTE : $x, y \in \mathbb{Q}$
HILBERT : 10e problème :

Y a-t-il une méthode générale pour trouver les solutions $\in \mathbb{Z}$? Non.

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + y^3 = z^3 \\ x^4 + y^4 = z^4 \end{array}\right| \Longrightarrow \text{pas de solution} \in \mathbb{Z} \text{ non triviale (FERMAT)}$$

Y a-t-il une méthode générale pour trouver les solutions $\in \mathbb{Q}$?

Problème ouvert.

$$\text{(facile)} \Updownarrow \begin{array}{l} \text{HILBERT} : \mathbb{Z} \\ \text{MATIYASEVICH} : \mathbb{N} \text{ (coefficients dans } \mathbb{Z}) \end{array} \Bigg| \text{pas de méthode}$$

$ax^2 + bx + c$

$\left\{(a, b, c) \mid \exists x : ax^2 + bx + c = 0\right\}$

Générer ce genre d'ensemble $\iff$ générer {fonction partielle récursive}, donc problème universel.

Le problème pour les polynômes de degré 4 est universel.

Sur $\mathbb{R}$: décidable

(algorithme de Sturm - Liouville)

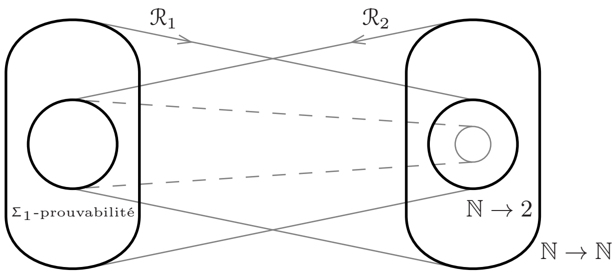
La théorie des réels du 1^er^ ordre est complète et décidable.

Polynôme diophantien trigonométrique sur les réels (on y ajoute sin)

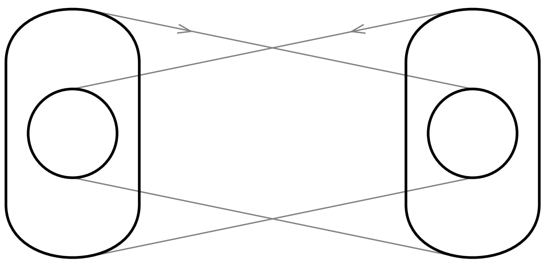
$D(a, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

$\downarrow$ l'ensemble est diophantien transformation

$D(a, x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$



prouvabilité | champ de la calculabilité



calculabilité classique | calculabilité quantique

9.2 Combinateurs

$\mathsf{KKK} = \mathsf{K}$

$\mathsf{K(SK)(KS)} = \mathsf{SK}$

$$S(KKK) = SK$$
$$SKKK = KK(KK) = K$$

$$\begin{aligned} Ix &= x \\ &= Kxy \\ &= Kx(Kx) \\ &= SKxy \end{aligned}$$

$$I = SKK$$
$$I = SKS$$
$$SKK = SKS$$

$$M = SII$$
$$MM = SII(SII) = I(SII)\,[I(SII)] = SII(SII)$$
$$M(SK) = SK(SK)$$
$$M = WI$$

$$\begin{aligned} Bxyz &= x(yz) \\ &= Kxz(yz) \\ &= S(Kx)yz \\ &= KSx(Kx)yz \end{aligned}$$

$$B = S(KS)K$$

10 Samedi 2 février 2008 : Histoire des combinateurs et algorithme

→ `TheolMachine_BMarchal_10_20080202_1_HistoireCombinateurs.mp3` (14, 1 Mo) (1h01'59)
→ `TheolMachine_BMarchal_10_20080202_2_AlgoCombinateurs.mp3` (10, 1 Mo) (44'30)

1924 : Moses Schönfinkel
$\lesssim$ 1930 : Haskell Curry
$\gtrsim$ 1930 : Alonzo Church : calcul-λ
(Kleene : thèse de Church)
programmation fonctionelle : LISP, ...

Schönfinkel cherche à éliminer les variables formelles en math.
Sous-but : n'avoir qu'un seul "type" d'objet.
Il ne pense plus en terme d'ensemble, mais en terme de fonction d'une seule variable.

(La conception extensionnelle d'une fonction :
factorielle $= \{(0, 1), (1, \mathbf{1}), (2, \mathbf{2}), (3, 6), (4, 24), \dots\}$

$$\begin{aligned} &(x + y)3 \\ &\quad = (3 + y) \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ 3+ : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \end{pmatrix}$$

$$+_2 xy$$
$$(+x)y$$

$$(+4)y = 4 + y$$
$$(+4)8 = 4 + 8 = 12$$

$(+'x : \mathbb{N} \xrightarrow{-} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ calculable)

$(x + y).(x + z)$

$Fxyz$
$\{[(Fx)y]\, z\}$ $\sim$ $\{[F(x)]\, (y)\}\, (z)$

$(x + y).(x + z)$ $\{.\, [(+x)y]\}\, [(+x)z]$
$\{u\, [(ax)y]\}\, [(ax)z]$ combinaison

$Gxyzua = \{u\, [(ax)y]\}\, [(ax)z]$

$\lambda x \lambda y \lambda z \lambda u \lambda a\, .\, \{u\, [(ax)y]\}\, [(ax)z]$
$\lambda x \left(\lambda y \left(\lambda z \left(\lambda u \left(\lambda a. \{u\, [(ax)y]\}\, [(ax)z]\right)\right)\right)\right) = G$

$\lambda x\, .\, (Mx) = x$ λ : abstraction
$\lambda x\, .\, (\sin x) = \sin$

$Bxyz = x(yz)$
$Bfgx$ "=" $f\,(g(x))$
Bfg "=" $g \circ f$

$\lambda x \lambda y \lambda z\, .\, [x(yz)]$

$\{\lambda x \lambda y \lambda z\, .\, [x(yz)]\}\, f{=}\lambda y \lambda z\, .\, [f(yz)]$
$\{\lambda y \lambda z\, .\, [f(yz)]\}g = \lambda z\, .\, [f(gz)]$

$\lambda x\, .\, M$ où M combinaison quelconque
le x éliminé de M

$(\lambda x\, .\, [x(yxx)])$

$(Kx)y$
$\lambda xy\, .\, x$

Représentation informelle de combinateurs :
$(\lambda x\, .\, x)a = a$ $Ix = x$
$(\lambda x\, .\, y)a = y$ $(Ky)x = Kyx = y$

Algorithme de Schönfinkel :

1. $\lambda x\, .\, x = I = SKK$
2. $\lambda x\, .\, y = Ky$ [15](avec y : combinaison sans x)
3. $\lambda x\, .\, (X_1 X_2) = S(\lambda x\, .\, X_1)(\lambda x\, .\, X_2)$ (avec X_1 et X_2 qui contiennent des x)

15. K fut nommé en tant que "créateur" de la fonction constante.

$\mathsf{M}x = \lambda x\,.\,(xx)$ $\qquad$ $\mathsf{M}a = aa$

$\mathsf{MM} = \mathsf{MM}$

Essai pour trouver M :

$$\begin{aligned}\lambda x\,.\,(xx) &\overset{3}{=} \mathsf{S}(\lambda x\,.\,x)(\lambda x\,.\,x)\\ &\overset{2\ 2}{=} \mathsf{SII} = \mathsf{S}(\mathsf{SKK})(\mathsf{SKK})\end{aligned}$$

$\lambda x\,.\,(\mathsf{M}x) = \mathsf{M}$

Preuve de la règle 3 :

$$\begin{aligned}\lambda x\,.\,[(X_1X_2)x] &\overset{?}{=} (X_1X_2)\\ &= \mathsf{S}(\lambda x\,.\,X_1)(\lambda x\,.\,X_2)x\\ &= (\lambda x\,.\,X_1)x\,[(\lambda x\,.\,X_2)x]\\ &= X_1X_2\end{aligned}$$

Exercices :

- Trouver X tel que $Xxy = xy$: $\lambda x\lambda y\,.\,(xy)$?
- Trouver X tel que $Xxy = yx$: $\lambda x\lambda y\,.\,(yx)$?
- Trouver X tel que $Xx = \mathsf{K}x$: $\lambda x\,.\,(\mathsf{K}x)$?

$(\lambda x\,.\,\mathsf{K}x)y = \mathsf{K}y$ $\quad$ donc $X = \lambda x\,.\,(\mathsf{K}x) = \mathsf{K}$

Avec l'algorithme : $\lambda x\,.\,(\mathsf{K}x) = \mathsf{S}(\lambda x\,.\,\mathsf{K})(\lambda x\,.\,x) = \mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathrm{I} = X$

Vérification : $Xy = \mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathrm{I}y = \mathsf{KK}y(\mathrm{I}y) = \mathsf{K}y$

Si théorie extensionnelle : $\left|\begin{array}{l}\mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathrm{I} = \mathsf{S}(\mathsf{KK})(\mathsf{SKK}) = \mathsf{K}\\ \ldots\end{array}\right.$

11 Samedi 9 février 2008 : Question combinateurs et algorithme

→ `TheolMachine_BMarchal_11_20080209_1_QuestionCombinateurs.mp3` (9,79 Mo) (42'47)
→ `TheolMachine_BMarchal_11_20080209_2_AlgoCombinateurs.mp3` (14,5 Mo) (1h03'21)

"Bible" de la calculabilité, composée des textes originaux :
The Undecidable (Martin Davis/ Ravin Press 1964 ou 1965)
(ou maintenant en Dover)

From Frege to Gödel (J. Van Heijenoort/ Harvard 1967) :
article de Moses Schönfinkel : K, S, $\mathrm{I} = \mathsf{SKK}$ et l'algorithme

Question de Michel…

…

$$\begin{aligned}X_1X_2 &= \lambda x\,.\,[(X_1X_2)x]\\ &= [\lambda x\,.\,(X_1x)]\,[\lambda x\,.\,(X_2x)]\\ &= X_1X_2\end{aligned}$$

Résolution des exercices :

- Trouver X tel que $Xxy = yx$:

$$\begin{aligned}
\lambda x\lambda y\,.\,(yx) &= \lambda x\,.\,[\lambda y\,.\,(yx)]\\
&= \lambda x\,.\,[S(\lambda y\,.\,y)(\lambda y\,.\,x)]\\
&= \lambda x\,.\,[SI(Kx)]\\
&= S\,[\lambda x\,.\,(SI)]\,[\lambda x\,.\,(Kx)]\\
&= S\,[K(SI)]\,[S(\lambda x\,.\,K)(\lambda x\,.\,x)]\\
&= S\,[K(SI)]\,[S(KK)I] = X
\end{aligned}$$

Vérification : $$\begin{aligned}
Xxy &= S\,[K(SI)]\,[S(KK)I]\,xy\\
&= K(SI)x\,[S(KK)Ix]\,y\\
&= SI\,[S(KK)Ix]\,y\\
&= Iy\,[S(KK)Ixy]\\
&= y\,[KKx(Ix)y]\\
&= y(Kxy)\\
&= yx
\end{aligned}$$

Commentaire personnel

...

$= SI\,[KKx(Ix)]\,y$

$= SI(Kx)y$

$= Iy(Kxy)$

$= yx$

- Trouver X tel que $Xxy = xy$:

$$\begin{aligned}
\lambda x\lambda y\,.\,(xy) &= \lambda x\,.\,[\lambda y\,.\,(xy)]\\
&= \lambda x\,.\,[S(\lambda y\,.\,x)(\lambda y\,.\,y)]\\
&= \lambda x\,.\,[S(Kx)I]\\
&= S\,[\lambda x\,.\,S(Kx)]\,[\lambda x\,.\,I]\\
&= S\{S(\lambda x\,.\,S)\,[\lambda x\,.\,(Kx)]\}\,(KI)\\
&= S\{S(KS)\,[S(\lambda x\,.\,K)(\lambda x\,.\,x)]\}\,(KI)\\
&= S\{S(KS)\,[S(KK)I]\}\,(KI)
\end{aligned}$$

$S(KK)I = K$ car $S(KK)Ixy = KKx(Ix)y = Kxy$

En fait : $S(KK)Ix = KKx(Ix) = Kx$

Exercices :

- $xy(yx)$?

- Trouver X tel que $Xxyz = xy(Xz)$?

Commentaire personnel

$$\begin{aligned}\lambda x\lambda y\lambda z\,.\,[xy(Xz)] &= \lambda x\,.\,(\lambda y\,.\,\{\lambda z\,.\,[xy(Xz)]\})\\ &= \lambda x\,.\,(\lambda y\,.\,\{S\,[\lambda z\,.\,(xy)]\,[\lambda z\,.\,(Xz)]\})\\ &= \lambda x\,.\,(\lambda y\,.\,\{S\,[S(\lambda z\,.\,x)(\lambda z\,.\,y)]\,[S(\lambda z\,.\,X)(\lambda z\,.\,z)]\})\\ &= \lambda x\,.\,(\lambda y\,.\,\{S\,[SKx(Ky)]\,[S(KX)I]\})\\ &= \ldots\end{aligned}$$

X tel que $Xxy = x(xy)$?
Y tel que $Yxy = Yx(xy)$? $\qquad = Yx\,[x(xy)] = \ldots$

"$\emptyset$-combinateurs" : $\emptyset$ et $(X\,Y)$
$(\emptyset\,\emptyset) = \emptyset\emptyset$
$[(\emptyset\,\emptyset)\,\emptyset] = \emptyset\emptyset\emptyset$
$[\emptyset\,(\emptyset\,\emptyset)] = \emptyset(\emptyset\emptyset)$

---

12 Samedi 16 février 2008 : But du cours

→ `TheolMachine_BMarchal_12_20080216_1_But.mp3` (12, 2 Mo) (53'23)
→ `TheolMachine_BMarchal_12_20080216_2_But.mp3` (12, 1 Mo) (53'04)

12.1 Combinateurs

Forêt := ensemble de combinateurs fermé pour l'application
(c.-à-d. que $\forall x, y \in$ forêt : $(x\,y) \in$ forêt)

On a vu la forêt $\{S, K\}$

Complétude par combinaison :
$xyzt \qquad xx(yz)x$

Complétude pour les fonctions partielles récursives : ...

$\{B, C, W, I\}$ est Turing-complet mais pas combinatoirement complet

$Bxyz = x(yz)$
$Cxyz = xzy$
$Mx = xx$
$Wxy = xx$

Exercice
Démontrer que dans une forêt contenant B et M, tout combinateur admet un point fixe. $\boxed{\forall \text{ forêt } \mathbb{F} :\ B, M \in \mathbb{F} \implies \forall x \in \mathbb{F}, \exists y \in \mathbb{F} : xy = y}$

$B = S(KS)K$
$M = SII$

Commentaire personnel

BxM(BxM)
Et pour $\Longleftarrow$?

12.2 But

The martyrdom of Hypatia (or The Death of the Classical World)
(Mangasar Magurditch Mangasarian)

Le principe du tiers-exclu est un principe de tolérance !
Cf. $\left\{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right\}$

Méthodologie
COMP $\to \perp$ (faux)
Dériver de l'hypothèse COMP
COMP $\to \neg$MAT

Le monde physique n'est que le bord de quelque chose de plus vaste.

UDA : Universal Dovetailer Argument
(argument du déployeur (dovetelleur) universel)
$\Rightarrow$ la physique n'est pas la science fondamentale

Commentaire personnel

$\overset{?}{\neq}$ le monde physique n'est pas premier

AUDA : Arithmetical UDA
$\Rightarrow$ la physique… et …

Le même argument que UDA mais un peu plus formel à l'intention des machines arithmétiques.

Donne en principe tous les détails.

Pour le moment, Bruno Marchal n'a pu qu'en extraire la logique quantique.

(Le critère de Popper a été réfuté !)

UDA	AUDA
COMP, c'est $\exists$ niveau de substitution : 1. "Yes doctor" 2. CT : Church Thesis (classique) (3. AR : Arithmetical Realism/ réalisme arithmétique ou platonisme arithmétique Mais AR est $\pm$ nécessaire dans CT)	

13 Samedi 23 février 2008 : Combinateur point fixe et algorithme plus fin ; UDA

→ `TheolMachine_BMarchal_13_20080223_1_PointFixe.mp3` (13, 3 Mo) (58'26)
→ `TheolMachine_BMarchal_13_20080223_2_UDA.mp3` (9, 65 Mo) (42'10)

13.1 1er théorème du point fixe

$\forall$ fôret $\mathbb{F}$ fermée pour la composition [16] :
$M \in \mathbb{F} \implies \forall x \in \mathbb{F} :$ "$x \circ M$""$x \circ M$" est un point fixe [17] pour x

Démonstration

$\forall x \in \mathbb{F} :$ | "$x \circ M$" $\in \mathbb{F}$ car $\mathbb{F}$ est fermée pour la composition
| "$x \circ M$""$x \circ M$" $\in \mathbb{F}$ car une forêt est fermée pour l'application

$$\text{“}x \circ M\text{”“}x \circ M\text{”} = x\,(M\text{“}x \circ M\text{”}) = x\,(\text{“}x \circ M\text{”“}x \circ M\text{”})$$ □

$\forall$ fôret $\mathbb{F}$:
$B, M \in \mathbb{F} \implies \forall x \in \mathbb{F} :\ BxM(BxM)$ est un point fixe pour x

En effet : $BxM(BxM) = x\,[M(BxM)]$
$= x\,[BxM(BxM)]$

$\forall x :\ x$ est un point fixe pour I $(Ix = x)$
(En particulier, I est un point fixe pour I)

13.2 Algorithme plus fin

(K est un combinateur
Kx est une combinaison, où x est une méta-variable)

Convenons que : | A est une combinaison ne contenant pas de variable libre x
| X et Y sont des combinaisons contenant la variable libre x

16. C.-à-d. que $\forall x, y \in \mathbb{F} :$ "$x \circ y$" $\in \mathbb{F}$, c.-à-d. que $\forall a \in \mathbb{F} :\ x(y\,a) \in \mathbb{F}$
17. $\forall x, y \in \mathbb{F} :\ y$ est un point fixe pour $x \overset{\triangle}{\iff} xy = y$
(la transformation x est invariante pour l'élément y)

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1\,. & \lambda x\,.\,A = \mathsf{K}A \\ 2\,. & \lambda x\,.\,x = \mathsf{I} = \mathsf{SKK} \\ 3\,. & \lambda x\,.\,(Ax) = A \qquad \text{(règle d'extensionnalité)} \\ 4\,. & \lambda x\,.\,(AX) = \mathsf{B}A(\lambda x\,.\,X) = \mathsf{S}(\mathsf{K}A)(\lambda x\,.\,X) \\ 4'. & \lambda x\,.\,(XA) = \mathsf{C}(\lambda x\,.\,X)A = \mathsf{S}(\lambda x\,.\,X)(\mathsf{K}A) \\ 5\,. & \lambda x\,.\,(XY) = \mathsf{S}(\lambda x\,.\,X)(\lambda x\,.\,Y) \end{array}}$$

$\mathsf{K}xy = x$
$\mathsf{I}x = x$

$\mathsf{B}xyz = x(yz)$
$\mathsf{C}xyz = xzy$
$\mathsf{S}xyz = xz(yz)$

Justification des règles :

1 . $(\lambda x\,.\,A)y = A = \mathsf{K}Ay$
2 . $(\lambda x\,.\,x)y = y = \mathsf{I}y$
3 . $[\lambda x\,.\,(Ax)]\,y = Ay$
En appliquant 5, on aurait : $\lambda x\,.\,(Ax) = \mathsf{S}(\lambda x\,.\,A)(\lambda x\,.\,x) = \mathsf{S}(\mathsf{K}A)\mathsf{I}$
or $\mathsf{S}(\mathsf{K}A)\mathsf{I}y = \mathsf{K}Ay(\mathsf{I}y) = Ay$
4 . $[\lambda x\,.\,(AX)]\,y = A\,[(\lambda x\,.\,X)y] = \mathsf{B}A(\lambda x\,.\,X)y$
4'. $[\lambda x\,.\,(XA)]\,y = (\lambda x\,.\,X)yA = \mathsf{C}(\lambda x\,.\,X)Ay$
5 . $[\lambda x\,.\,(XY)]\,y = (\lambda x\,.\,X)y\,[(\lambda x\,.\,Y)y] = \mathsf{S}(\lambda x\,.\,X)(\lambda x\,.\,Y)y$

Commentaire personnel

$$\boxed{3'.\ \lambda x\,.\,(xA) = \mathsf{T}A = \mathsf{CI}A = \mathsf{SI}(\mathsf{K}A)}$$

$\mathsf{T}xy = yx$

car $\lambda x\,.\,(xA) = \mathsf{C}(\lambda x\,.\,x)A = \mathsf{CI}A$

13.3 UDA

UDA = Comp, entraîne le renversement entre la physique et la (psychologie) théologie

Pour comprendre cet argument il faut s'impliquer personnellement.

AUDA = UDA traduit dans le langage d'une MU.

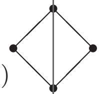
Prouvabilité des machines arithmétique de Robinson $\parallel$ calculabilité
(Pour la Σ_1-vérité : prouvabilité $\simeq$ calculabilité)

La plus simple des machines loebiennes : PA
$$A(0) \wedge \forall x\,[A(x) \to A(x+1)] \ \longrightarrow\ \forall x\, A(x)$$

physique = le bord

esprit = mathématique
(platonisme)

Dieu — Vérité

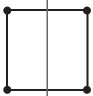


G — G^* ($\Diamond \top$) — prouvabilité

3-soi (loebien) — 3-soi

âme (soi à la 1^{re} personne) — connaissabilité

S4Grz (narcisse, petit barbare, 1-soi)



Z = KD? — Z^* — observabilité

X — X^* — sensibilité

(la douleur apparaît ici)

prouvable — vrai

L'identité personnelle est personnelle.

Le soi à la 1^{re} personne n'est pas une machine. N'est pas formalisable.

14 Samedi 1^{er} mars 2008 : Duplications

→ `TheolMachine_BMarchal_14_20080301_1_Duplications.mp3` (11 Mo) (48'03)
→ `TheolMachine_BMarchal_14_20080301_2_Duplications.mp3` (9, 1 Mo) (39'47)

14.1 Rapide retour sur les combinateurs

$\lambda x\,.\,(\lambda y\,.\,\{x\,[yKS(xx)y]\})$

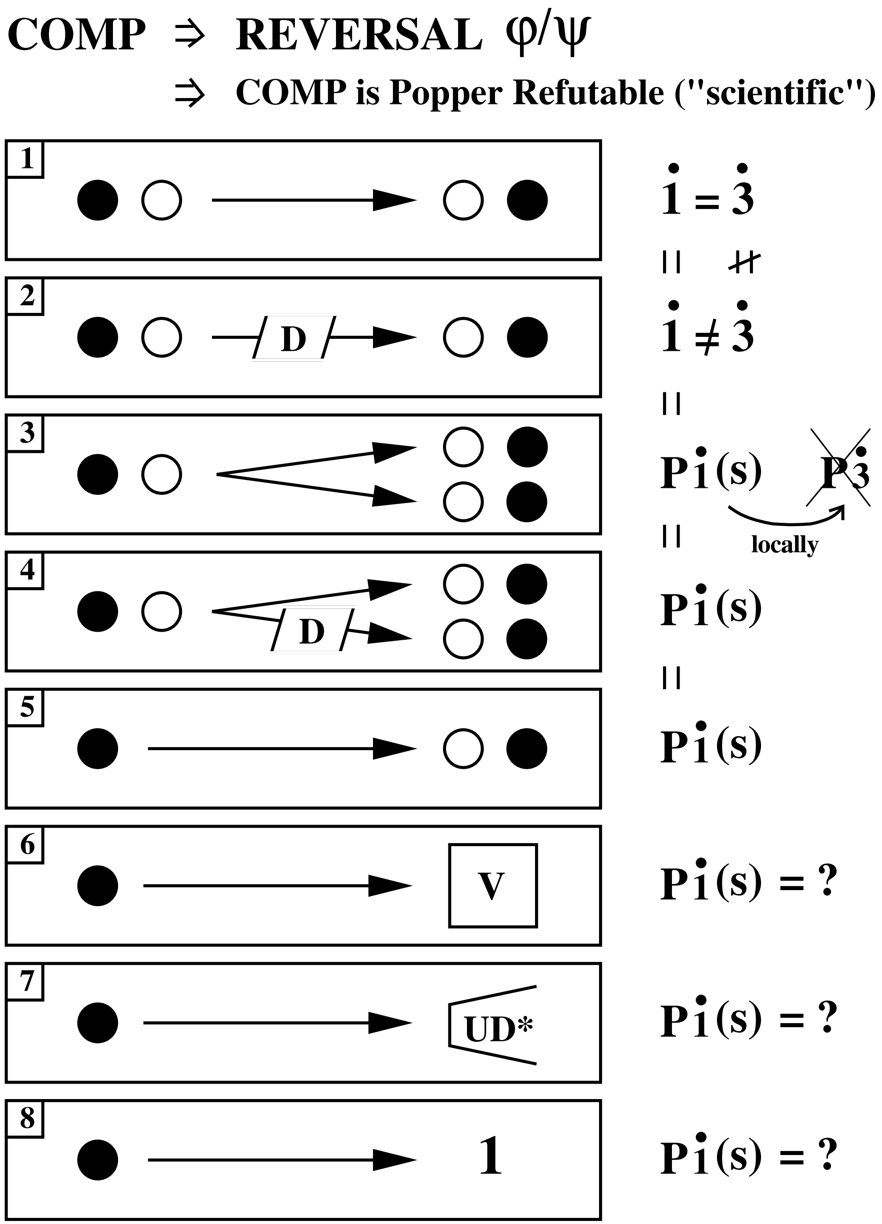
$(\lambda x\,.\,M)x = M$

$\lambda x\,.\,(Mx) \stackrel{?}{=} M$ $\qquad\qquad$ $\lambda x\,.\,(\sin x) = \sin$

Commentaire personnel

$\lambda x\,.\,(Mx) = S(\lambda x\,.\,M)(\lambda x\,.\,x) = S(\lambda x\,.\,M)I$

$[\lambda x\,.\,(Mx)]\,x = S(\lambda x\,.\,M)Ix = (\lambda x\,.\,M)x(Ix) = Mx \quad \Longrightarrow \quad \lambda x\,.\,(Mx) = M$



The Origin of Physical Laws and Sensations[18] (Bruno Marchal, 2004)

18. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/publications/SANE2004MARCHALAbstract.html

Cf. *Conscience et Mécanisme*[19] (Bruno Marchal, 1994)

Article sur Everett et l'hypothèse des mondes multiples : *Les nombreux univers de Hugh Everett* (*Pour la Science* n°365 mars 2008, rubrique *Présence de l'histoire*, p.26/ Peter Byrne)

15 Samedi 8 mars 2008 : Combinateurs

→ `TheolMachine_BMarchal_15_20080308_1_Combinateurs.mp3` (11 Mo) (48'19)
→ `TheolMachine_BMarchal_15_20080308_2_Combinateurs.mp3` (10, 6 Mo) (46'31)

Règle d'inférence : $\dfrac{Ax = Bx}{A = B}$

$\{\lambda x \,.\, [\lambda y \,.\, (\lambda z \,.\, A)]\}$ $\{[(xy)z]\, t\}$

Rappel et justification des règles de l'algorithme plus fin : cf. p.42

Axiomes de la logique combinatoire (SK) :

- $Kxy = x$
- $Sxyz = xz(yz)$
- $\dfrac{Ax = Ay}{x = y}$
- $\dfrac{A = B}{xA = xB}$
- $\dfrac{Ax = Bx}{A = B}$ (axiome d'extensionalité)
- $x = x$ (= réflexive)
- $x = y \implies y = x$ (= symétrique)
- $\dfrac{x = y \qquad x = z}{y = z}$ (= transitive)

Exercices :
Trouver A tel que $Axy = xy$:

Commentaire personnel

$A = \lambda x \lambda y \,.\, (xy) = \lambda x \,.\, [\lambda y \,.\, (xy)] = \lambda x \,.\, x = I$
Vérification : $Ixy = xy$

Trouver A tel que $Axy = yx$:

Commentaire personnel

19. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/bxlthesis/consciencemecanisme.html

$A = \lambda x \lambda y \,.\, (yx) = \lambda x \,.\, [\lambda y \,.\, (yx)] = \lambda x \,.\, (CIx) = CI$
Vérification : $CIxy = Iyx = yx$

Trouver A tel que $Axyz = x(yx)zz$:

——— Commentaire personnel ———

$A = \lambda x \lambda y \lambda z \,.\, [x(yx)zz] = \ldots$

Trouver A tel que $Axyz = xy(xxA)yz$:

——— Commentaire personnel ———

$A = \lambda x \lambda y \lambda z \,.\, [xy(xxA)yz] = \ldots$

---

16 Samedi 15 mars 2008 : Exercice combinateur ; Computationnalisme

→ `TheolMachine_BMarchal_16_20080315_1_Combinateurs.mp3` (4, 8 Mo) (20'59)
→ `TheolMachine_BMarchal_16_20080315_2_Computationnalisme.mp3` (18, 4 Mo) (1h20'25)

16.1 Exercice combinateur

Trouver A tel que $Axy = y(xA)x$:

——— Commentaire personnel ———

$A = \lambda x \lambda y \,.\, [y(xA)x] = \ldots$

Utiliser le combinateur paradoxal.

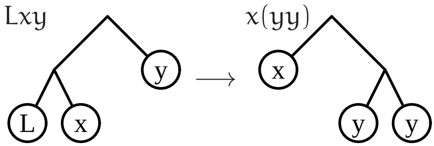
$Mx = xx$
$Bxyz = x(yz)$

$\forall X, \exists Y : \; XY = Y$ Y point fixe

Oiseau sage : $\Theta X = Y$ tel que $XY = Y$
donc $\Theta X = XY = X(\Theta X)$
ΘX est un point fixe de X

Un combinateur X est dit propre si $Xxyz... =$ une combinaison des $x, y, z, \ldots$
Θ est impropre

Lark (alouette) : $Lxy = x(yy)$



`if b then x else y` : $\texttt{VRAI} := K \qquad Kxy = x$ (éliminateur gauche)

$\texttt{FAUX} := KI \qquad KIxy = y$ (éliminateur droit)

$TIx = xI \qquad Axy = (xI)y$

$Txy = yx$

TI est un combinateur impropre

Commentaire personnel

Trouver (avec l'algorithme) B tel que $Bxyz = x(yz)$:

$$\begin{aligned}
B &= \lambda x\lambda y\lambda z\,.\,[x\,(yz)] \\
&= \lambda x\lambda y\,.\,\{S\,(\lambda z.x)\ [\lambda z.(yz)]\} \\
&= \lambda x\lambda y\,.\,\{S\,(Kx)\ [S(\lambda z.y)(\lambda z.z)]\} \\
&= \lambda x\lambda y\,.\,\{S\,(Kx)\ [S(Ky)I]\} \\
&= \lambda x\,.\,(S\ \{\lambda y\,.\,[S(Kx)]\}\ \{\lambda y\,.\,[S(Ky)I]\}) \\
&= \lambda x\,.\,[S\ \{K\,[S(Kx)]\}\ (S\,\{\lambda y\,.\,[S(Ky)]\}\,(\lambda y\,.\,I))] \\
&= \lambda x\,.\,[S\ \{K\,[S(Kx)]\}\ (S\,\{S(\lambda y\,.\,S)\ [\lambda y\,.\,(Ky)]\}\,(KI))] \\
&= \lambda x\,.\,[S\ \{K\,[S(Kx)]\}\ (S\,\{S(KS)\ [S(\lambda y\,.\,K)(\lambda y\,.\,y)]\}\,(KI))] \\
&= \lambda x\,.\,[S\ \{K\,[S(Kx)]\}\ (S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI))] \\
&= S\ [\lambda x\,.\,(S\ \{K\,[S(Kx)]\})]\ [\lambda x\,.\,(S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI))] \\
&= S\ [S(\lambda x\,.\,S)\ (\lambda x\,.\,\{K\,[S(Kx)]\})]\ [K\,(S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI))] \\
&= S\ [S(KS)\ (S(\lambda x\,.\,K)\,\{\lambda x\,.\,[S(Kx)]\})]\ [K\,(S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI))] \\
&= S\ [S(KS)\ (S(KK)\,\{S(\lambda x\,.\,S)\ [\lambda x\,.\,(Kx)]\})]\ [K\,(S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI))] \\
&= S\ [S(KS)\ (S(KK)\,\{S(KS)\ [S(\lambda x\,.\,K)(\lambda x\,.\,x)]\})]\ [K\,(S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI))] \\
&= S\ [S(KS)\ (S(KK)\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\})]\ [K\,(S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI))]
\end{aligned}$$

Vérification : $Bxyz$

$$\begin{aligned}
&= S\ [S(KS)\ (S(KK)\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\})]\ [K\,(S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI))]\ x\,y\,z \\
&= S\,(KS)\ (S(KK)\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\})\ x\ [K\,(S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI))\,x]\ y\,z \\
&= K\,S\,x\ (S(KK)\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}x)\ (S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI))\ y\,z \\
&= S\ (KKx\,\{S(KS)\,[S(KK)I]\,x\})\ (S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI))\ y\,z \\
&= S\ (K\,\{KSx\,[S(KK)Ix]\})\ (S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI))\ y\,z \\
&= S\ (K\,\{S\,[KKx(Ix)]\})\ (S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI))\ y\,z \\
&= S\ \{K\,[S(Kx)]\}\ (S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI))\ y\,z \\
&= K\ [S(Kx)]\ y\ (S\,\{S(KS)\ [S(KK)I]\}\,(KI)y)\ z \\
&= S\,(Kx)\ \{S(KS)\,[S(KK)I]\,y(KIy)\}\ z \\
&= S\,(Kx)\ \{KSy\,[S(KK)Iy]\ I\}\ z \\
&= S\,(Kx)\ \{S\,[KKy(Iy)]\ I\}\ z \\
&= S\,(Kx)\ [S(Ky)I]\ z \\
&= K\,x\,z\ [S(Ky)Iz]
\end{aligned}$$

$= x\ [Kyz(Iz)]$
$= x\,(yz)$

En utilisant l'algorithme plus fin :
$B = \lambda x\lambda y\lambda z\,.\,[x\,(yz)]$
$= \lambda x\lambda y\,.\{B\,x\ [\lambda z\,.\,(yz)]\}$
$= \lambda x\lambda y\,.(B\,x\,y)$
$= \lambda x\,.(B\,x)$
$= B$

En utilisant l'algorithme plus fin mais sans utiliser la règle avec B :
$B = \lambda x\lambda y\lambda z\,.\,[x\,(yz)]$
$= \lambda x\lambda y\,.\{S\,(\lambda z.x)\ [\lambda z.(yz)]\}$
$= \lambda x\lambda y\,.\,[S\,(Kx)\,y]$
$= \lambda x\,.\,[S\,(Kx)]$
$= S\,(\lambda x\,.\,S)\ [\lambda x\,.\,(Kx)]$
$= S\,(KS)\,K$
Vérification : $Bxyz$
$= S\,(KS)\,K\,x\,y\,z$
$= K\,S\,x\,(Kx)\,y\,z$
$= S\,(Kx)\,y\,z$
$= K\,x\,z\,(yz)$
$= x\,(yz)$

Solution de Michel Boelen :
$B = S\ (S(KS)\{S(KK)\,[S(KS)K]\})\ (K\{S\,[S(KS)K]\,(KI)\})$
Vérification : $Bxyz$
$= S\ (S(KS)\{S(KK)\,[S(KS)K]\})\ (K\{S\,[S(KS)K]\,(KI)\})\ x\,y\,z$
$= S\,(KS)\ \{S(KK)\,[S(KS)K]\}\ x\ (K\{S\,[S(KS)K]\,(KI)\}x)\ y\,z$
$= K\,S\ x\ \{S(KK)\,[S(KS)K]\,x\}\ \{S\,[S(KS)K]\,(KI)\}\ y\,z$
$= S\ \{KKx\,[S(KS)Kx]\}\ \{S\,[S(KS)K]\,(KI)\}\ y\,z$
$= S\ \{K\,[KSx(Kx)]\}\ \{S\,[S(KS)K]\,(KI)\}\ y\,z$
$= S\ \{K\,[S(Kx)]\}\ \{S\,[S(KS)K]\,(KI)\}\ y\,z$
$= K\ [S(Kx)]\ y\ \{S\,[S(KS)K]\,(KI)y\}\ z$
$= S\,(Kx)\ [S(KS)Ky(KIy)]\ z$
$= S\,(Kx)\ [KSy(Ky)I]\ z$
$= S\,(Kx)\ [S(Ky)I]\ z$
$= K\,x\,z\ [S(Ky)Iz]$
$= x\ [Kyz(Iz)]$
$= x\,(yz)$

16.2 Computationnalisme

p	$\longrightarrow$	$\perp$
0	$\boxed{1}$	0
1	$\boxed{0}$	0

Intuitionnisme refuse : $(\neg p \to \perp) \implies p$
accepte : $(\neg p \to \perp) \implies \neg\neg p$

« machine [...] pour savoir ce qui arrive elle va devoir tenir compte de toutes les histoires possibles. »

Commentaire personnel

Effet de langage ? : *ce qui* arrive >< *toutes les* histoires possibles

---

Indexicale : mot qui change par rapport au contexte.
Ex. : je, maintenant

17 Samedi 22 mars 2008 : Combinateurs

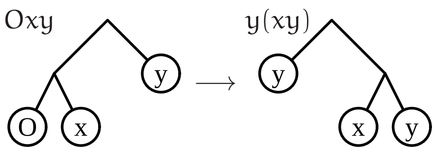
→ `TheolMachine_BMarchal_17_20080322_1_PointFixe.mp3` (7, 36 Mo) (32'11)
→ `TheolMachine_BMarchal_17_20080322_2_CombParadoxal.mp3` (13, 8 Mo) (1h00'28)

Rappel de la diagonale de Cantor :
On **suppose** la suite de toutes les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: $f_0, f_1, f_2, \ldots$
1re diagonalisation : $\forall n \in \mathbb{N} : \; g(n) := f_n(n) + 1$
$\exists k \in \mathbb{N} : \; f_k = g$
2e diagonalisation : $f_k(k) = g(k) = f_k(k) + 1$ **KO**

Dans les combinateurs :
1re diagonalisation : $Mx = xx$
2e diagonalisation : $\Omega = MM = MM = \ldots$ ne s'arrête jamais

$xx = Ix(Ix) = SIIx = Mx \implies M = SII \quad (= LI = OI = UI = WI)$

Owl (hibou, chouette) : $Oxy = y(xy)$
$O = SI$



$\boxed{\forall \text{ forêt } \mathbb{F} : \; B \in \mathbb{F} \implies \mathbb{F} \text{ est fermé pour la composition}}$
? En effet : $Babx = a(bx) \in \mathbb{F}$ car fermé pour l'application ?

Exercice : trouver une forêt fermée pour la composition qui ne possède pas B

Commentaire personnel

Exemple trivial : forêt "engendrée" par K $= \{K, KK, K(KK), K[K(KK)], \ldots\}$

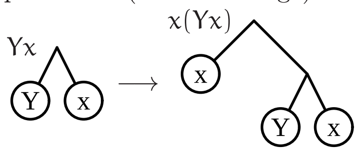
17.1 Combinateurs paradoxaux

Dans la SK-forêt :
$\forall A, \exists F : \ AF = F$ (F est un point fixe de A [20])
Tout combinateur possède un point fixe
(et de plus on sait en trouver un : $BAM(BAM)$ où $B = S(KS)K$)

Cherchons un combinateur Y qui, pour un combinateur A,
donne un point fixe de A.
Donc un Y tel que $\forall A : \ YA = F$ avec $AF = F$
$YA = F = AF = A(YA)$

Un tel combinateur Y est appelé combinateur paradoxal (ou oiseau sage) :

$Yx = x(Yx)$



$BxM(BxM)$ est un point fixe de x :
$Yx = BxM(BxM) = M(BxM) = M(CBMx) = M\,[(CBM)x] = BM(CBM)x$
Donc $Y = BM(CBM)$

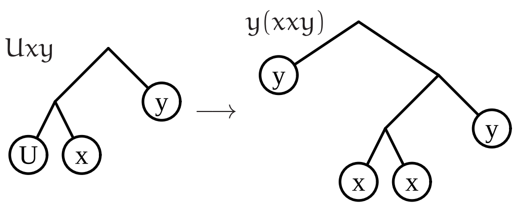
Commentaire personnel

En appliquant l'algorithme :
$Y = \lambda x\,.\ [BxM(BxM)] = S\,[\lambda x\,.\,(BxM)]\,[\lambda x\,.\,(BxM)]$
$\lambda x\,.\,(BxM) = C\,[\lambda x\,.\,(Bx)]\,M = CBM$
Donc $Y = S(CBM)(CBM)$

$Lx(Lx) = x\,[Lx(Lx)]$ donc $Lx(Lx)$ est un point fixe de x

$Y = SLL$
$Lx(Lx) = M(Lx) = (\text{“}M \circ L\text{”})x = BMLx$
$Y = BML$

Turing : $Uxy = y(xxy)$



$U = LO = L(SI) = BOM$
UU est un oiseau sage En effet : $UUx = x(UUx)$

20. Smullyan dit que l'oiseau A raffole (est amoureux) de l'oiseau F

Commentaire personnel

UU est "le" point fixe de O
$UU = YO$

Trouver A tel que $Ax = xA(Ax)$:
$Ay = yA(Ay)$
Trouver (avec l'algo) P tel que $Pxy = yx(xy)$
"Le" A cherché est "le" point fixe de P : $A = YP$

Exercices : Trouver des A tels que :
- $Ax = A$ (A est un combinateur égocentrique) YK
- $Axy = Ayx$ YC
- $Ax = Axx$ YW
- $Ax = AAx$ YM
- $Ax = AA$ $Y(SBK)$

18 Samedi 29 mars 2008 : Duplications

→ `TheolMachine_BMarchal_18_20080329_1_DupliqueHomme.mp3` (13 Mo) (56'50)
→ `TheolMachine_BMarchal_18_20080329_2_DupliqueRobot.mp3` (9, 65 Mo) (42'11)

Le déterminisme à la 3e personne entraîne l'indéterminisme à la 1re personne.

Newton : lois universelles $F = ma = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$
Laplace : lois déterministes
Jusque Poincaré : chaos (mais chaos déterministe)

Commentaire personnel

"**Chaos déterministe** : propriété caractéristique d'un système dont l'évolution à long terme est imprévisible, bien qu'il obéisse à des lois."
([Larousse])

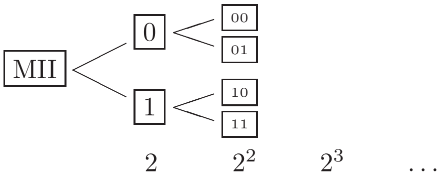
Pascal : déjà "incertitude" dans les probabilités
(mais ne remet pas en cause le déterminisme)
1re vraie mise en cause du déterminisme : MQ
Bruno Marchal : déterminisme ⟶ ultra-indéterminisme

Je suis une machine. $\Longrightarrow$ Je suis duplicable.
Discussion de l'étape 3 (cf. p. 44) (avec un être humain) :

☺ → ☺ Washington
☺ → ☺ Moscou

MII (Machine à Inférence Inductive) :
Soit *une* suite prédéterminée de 0 et de 1.
La MII dovetelle sur tous les programmes et sélectionne le premier programme qui donne le début de la suite (qui “explique” son passé). On dit que la MII converge si le programme qu'elle a sélectionné donne au fur et à mesure le reste de la suite (elle “prédit” son future).

Discussion de l'étape 3 avec une MII :



Commentaire personnel

Les différentes étapes avec une caméra (qui enregistre) à la place d'un être humain :
. . . ?

19 Samedi 5 avril 2008 : Combinateurs et les nombres

→ `TheolMachine_BMarchal_19_20080405_1_Combinateurs.mp3` (13 Mo) (56'52)
→ `TheolMachine_BMarchal_19_20080405_2_CombinateursNombres.mp3` (15,2 Mo) (1h06'36)

Résolution de l'exercice, trouver A tel que $Ax = xA(Ax)$:
Reformulons en $Ay = yA(Ay)$
Il s'agit de trouver x tel que $xy = yx(xy)$
Pour cela cherchons P tel que $Pxy = yx(xy)$
(On prendra alors $A := YP = P(YP) = PA$
et on vérifie que ça correspondra : $Ax = PAx = xA(Ax)$)

$$\begin{aligned}
P &:= \lambda x \lambda y \,.\, [yx(xy)] \\
&= \lambda x \,.\, \{S\,[\lambda y \,.\, (yx)]\,[\lambda y \,.\, (xy)]\} \\
&= \lambda x \,.\, \{S\,[C(\lambda y \,.\, y)x]\,x\} \\
&= \lambda x \,.\, [S(CIx)x] \\
&= S\,\{\lambda x \,.\, [S(CIx)]\}\,(\lambda x \,.\, x) \\
&= S\,\{BS\,[\lambda x \,.\, (CIx)]\}\,I \\
&= S\,[BS(CI)]\,I \\
A &:= YP = BML\{S\,[BS(CI)]\,I\} \\
&= M\,(L\{S\,[BS(CI)]\,I\})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P &:= \lambda x \lambda y \,.\, [yx(xy)] \\
&= \lambda x \,.\, \{S\, [\lambda y \,.\, (yx)]\, [\lambda y \,.\, (xy)]\} \\
&= \lambda x \,.\, [S(Tx)x] \\
&= S\, \{\lambda x \,.\, [S(Tx)]\}\, (\lambda x \,.\, x) \\
&= S\, \{BS\, [\lambda x \,.\, (Tx)]\}\, I \\
&= S(BST)I
\end{aligned}
$$

$A := YP = Y\,[S(BST)I]$

Trouver A tel que $Ax = A$:
$Ay = A$
Pour cela trouver P tel que $Pxy = A$: $P = K$
$A := YP = YK = K(YK)$
Vérification : $Ax = YKx = K(YK)x = YK = A$

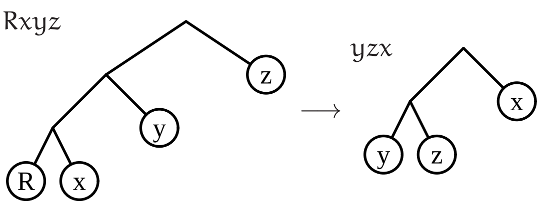
Trouver Y tel que $Yx = x(Yx)$:
$Yy = y(Yy)$
Pour cela trouver P tel que $Pxy = y(Yy)$

$$
\begin{aligned}
P &:= \lambda x \lambda y \,.\, [y(Yy)] \\
&= \lambda x \,.\, \{S\, (\lambda y \,.\, y)\, [\lambda y \,.(Yy)]\} \\
&= \lambda x \,.(SIY) \\
&= K(SIY)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y &:= YP = Y\,[K(SIY)] \\
&= K(SIY)\, \{Y\, [K(SIY)]\} \\
&= SIY
\end{aligned}
$$

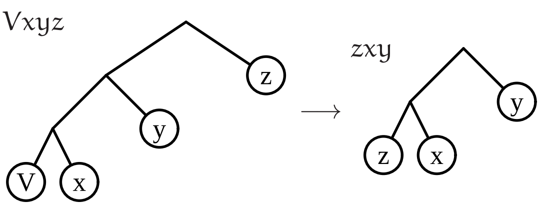
Vérification : $Yx = SIYx = Ix(Yx) = x(Yx)$

Robin (rouge-gorge) :
(rotation gauche)
$Rxyz = yzx$
$R = BBT$



$Rx = BBTx = B(Tx)$
$Rxyz = B(Tx)yz = Tx(yz) = yzx$

Vireo (viréo, un passereau) :
(rotation droite)
$Vxyz = zxy$
$V = BCT$



$\mathsf{V}x = \mathsf{BCT}x = \mathsf{C}(\mathsf{T}x)$
$\mathsf{V}xyz = \mathsf{C}(\mathsf{T}x)yz = \mathsf{T}xzy = zxy$

19.1 Système de naturels de Barendregt

$\texttt{VRAI} := \mathsf{K}$
$\texttt{FAUX} := \mathsf{KI} = \texttt{VRAI}\ 0$

$\texttt{NON} := \mathsf{V}(\mathsf{KI})\mathsf{K} = \mathsf{V}\ \texttt{FAUX}\ \texttt{VRAI} = \texttt{SUCC}\ \texttt{VRAI}$

$\texttt{ET} := \mathsf{R}(\mathsf{KI}) = \mathsf{R}\ \texttt{FAUX}$
$\texttt{OU} := \mathsf{TK} = \mathsf{T}\ \texttt{VRAI}$
$\rightarrow := \mathsf{RK} = \mathsf{R}\ \texttt{VRAI}$

$\texttt{if}\ a\ \texttt{then}\ b\ \texttt{else}\ c\ := abc$ avec $a = \texttt{VRAI}$ ou $\texttt{FAUX}$

$0 := \mathrm{I}$
$\texttt{SUCC} := \mathsf{V}(\mathsf{KI}) = \mathsf{V}\ \texttt{FAUX}$
$\texttt{PRED} := \mathsf{T}(\mathsf{KI}) = \mathsf{T}\ \texttt{FAUX}$
$\texttt{ZERO?} := \mathsf{TK} = \mathsf{T}\ \texttt{VRAI}$

Utilisation sur quelques exemples :
$\texttt{NON VRAI} = \mathsf{V}(\mathsf{KI})\mathsf{KK} = \mathsf{K}(\mathsf{KI})\mathsf{K} = \mathsf{KI} = \texttt{FAUX}$
$\texttt{NON FAUX} = \mathsf{V}(\mathsf{KI})\mathsf{K}(\mathsf{KI}) = \mathsf{KI}(\mathsf{KI})\mathsf{K} = \mathsf{K} = \texttt{VRAI}$

$\texttt{ET VRAI VRAI} = \mathsf{R}(\mathsf{KI})\mathsf{KK} = \mathsf{KK}(\mathsf{KI}) = \mathsf{K} = \texttt{VRAI}$
$\texttt{ET VRAI FAUX} = \mathsf{R}(\mathsf{KI})\mathsf{K}(\mathsf{KI}) = \mathsf{K}(\mathsf{KI})(\mathsf{KI}) = \mathsf{KI} = \texttt{FAUX}$
$\texttt{ET FAUX VRAI} = \mathsf{R}(\mathsf{KI})(\mathsf{KI})\mathsf{K} = \mathsf{KIK}(\mathsf{KI}) = \mathrm{I}(\mathsf{KI}) = \mathsf{KI} = \texttt{FAUX}$
$\texttt{ET FAUX FAUX} = \mathsf{R}(\mathsf{KI})(\mathsf{KI})(\mathsf{KI}) = \mathsf{KI}(\mathsf{KI})(\mathsf{KI}) = \mathrm{I}(\mathsf{KI}) = \mathsf{KI} = \texttt{FAUX}$

$\texttt{ZERO?}\ 0 = \mathsf{TKI} = \mathsf{IK} = \mathsf{K} = \texttt{VRAI}$
$\texttt{ZERO?}\ (\texttt{SUCC}\ x) = \mathsf{TK}\,[\mathsf{V}(\mathsf{KI})x] = \mathsf{V}(\mathsf{KI})x\mathsf{K} = \mathsf{K}(\mathsf{KI})x = \mathsf{KI} = \texttt{FAUX}$

Définition par récurrence de l'addition :
$x + 0 := x$
$x + s(y) := s(x + y)$ avec $s(x) := x + 1$

$$\begin{aligned} x + 5 &= x + s(4) = s(x+4) \\ &= s(x + s(3)) = s(s(x+3)) \\ &= s(s(x + s(2))) = s(s(s(x+2))) \\ &= s(s(s(x + s(1)))) = s(s(s(s(x+1)))) \\ &= s(s(s(s(x + s(0))))) = s(s(s(s(s(x+0))))) \\ &= s(s(s(s(s(x))))) \end{aligned}$$

Algorithme correspondant : $\texttt{ADD}(x, y)$:
$\texttt{if}\ y = 0\ \texttt{then}\ x$
$\qquad \texttt{else SUCC}\,(\texttt{ADD}\,(x, \texttt{PRED}(y)))$

Combinateur correspondant :
$\texttt{ADD}\ x\ y = \texttt{ZERO?}\ y\ x\ \{\texttt{SUCC}\ [\texttt{ADD}\ x\ (\texttt{PRED}\ y)]\}$
$\quad = \mathsf{TK}yx\,(\mathsf{V}(\mathsf{KI})\{\texttt{ADD}\ x\ \ [\mathsf{T}(\mathsf{KI})y]\})$

Commentaire personnel

Trouvons ADD tel que $\texttt{ADD}\ x\ y = \texttt{ZERO?}\ y\ x\ \{\texttt{SUCC}\ [\texttt{ADD}\ x\ (\texttt{PRED}\ y)]\}$
Il s'agit de trouver x tel que $x\ y\ z = \texttt{ZERO?}\ z\ y\ \{\texttt{SUCC}\ [x\ y\ (\texttt{PRED}\ z)]\}$
Cherchons donc le P tel que $\mathsf{P}\ x\ y\ z = \texttt{ZERO?}\ z\ y\ \{\texttt{SUCC}\ [x\ y\ (\texttt{PRED}\ z)]\}$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P} &:= \lambda x\lambda y\lambda z\,.\,(\texttt{ZERO?}\ z\ y\ \{\texttt{SUCC}\ [x\ y\ (\texttt{PRED}\ z)]\}) \\
&= \lambda x\lambda y\,.\,[\mathsf{S}\ \ [\lambda z\,.(\texttt{ZERO?}\ z\ y)]\,(\lambda z\,.\{\texttt{SUCC}\ [x\ y\ (\texttt{PRED}\ z)]\})] \\
&= \lambda x\lambda y\,.\,[\mathsf{S}\ \{\mathsf{C}\ \ [\lambda z\,.\,(\texttt{ZERO?}\ z)]\ \ y\}\,(\mathsf{B}\ \texttt{SUCC}\ \{\lambda z\,.\,[x\ y\ (\texttt{PRED}\ z)]\})] \\
&= \lambda x\lambda y\,.\,[\mathsf{S}\ \{\mathsf{C}\ \texttt{ZERO?}\ y\}\,(\mathsf{B}\ \texttt{SUCC}\ \{\mathsf{B}\ (xy)\ \ [\lambda z\,.\,(\texttt{PRED}\ z)]\})] \\
&= \lambda x\lambda y\,.\,(\mathsf{S}\ \{\mathsf{C}\ \texttt{ZERO?}\ y\}\{\mathsf{B}\ \texttt{SUCC}\ [\mathsf{B}\ (xy)\ \texttt{PRED}]\}) = \ldots \\
&= \lambda x\,.\,(\mathsf{S}\ \ [\mathsf{B}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{C}\ \texttt{ZERO?})]\ \{\mathsf{B}\ (\mathsf{B}\ \texttt{SUCC})\ \ [\mathsf{C}\ (\mathsf{BB}x)\ \texttt{PRED}]\}) \\
&= \mathsf{B}\ \{\mathsf{S}\ \ [\mathsf{B}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{C}\ \texttt{ZERO?})]\}\ \ (\lambda x\,.\{\mathsf{B}\ (\mathsf{B}\ \texttt{SUCC})\ \ [\mathsf{C}\ (\mathsf{BB}x)\ \texttt{PRED}]\}) \\
&= \mathsf{B}\ \{\mathsf{S}\ \ [\mathsf{B}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{C}\ \texttt{ZERO?})]\}\ \ (\mathsf{B}\ \ [\mathsf{B}\ (\mathsf{B}\ \texttt{SUCC})]\ \{\lambda x\,.\,[\mathsf{C}\ (\mathsf{BB}x)\ \texttt{PRED}]\})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda x\,.\,[\mathsf{C}\ (\mathsf{BB}x)\ \texttt{PRED}] &= \mathsf{C}\ \{\lambda x\,.\ [\mathsf{C}(\mathsf{BB}x)]\}\ \texttt{PRED} = \mathsf{C}\ \{\mathsf{BC}\,[\lambda x\,.\,(\mathsf{BB}x)]\}\ \texttt{PRED} \\
&= \mathsf{C}\ \ [\mathsf{BC}(\mathsf{BB})]\ \ \texttt{PRED}
\end{aligned}
$$

$\mathsf{P} = \mathsf{B}\ \{\mathsf{S}\ \ [\mathsf{B}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{C}\ \texttt{ZERO?})]\}\ \ (\mathsf{B}\ \ [\mathsf{B}\ (\mathsf{B}\ \texttt{SUCC})]\ \ \{\mathsf{C}\ \ [\mathsf{BC}(\mathsf{BB})]\ \ \texttt{PRED}\})$

$$
\begin{aligned}
\texttt{ADD} &:= \mathsf{YP} \\
&= \mathsf{Y}\ \ [\mathsf{B}\ \{\mathsf{S}\ \ [\mathsf{B}\ \mathsf{S}\ (\mathsf{C}\ \texttt{ZERO?})]\}\ \ (\mathsf{B}\ \ [\mathsf{B}\ (\mathsf{B}\ \texttt{SUCC})]\ \ \{\mathsf{C}\ \ [\mathsf{BC}(\mathsf{BB})]\ \ \texttt{PRED}\})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x + 0 &= x \\
x + (y+1) &= (x+y)+1
\end{aligned}
\qquad
x + y = \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ [x + (y-1)] + 1 & \text{sinon} \end{cases}
$$

$\texttt{ADD}\ x\ y = \texttt{ZERO?}\ y\ x$
$\qquad\qquad \{\texttt{SUCC}\,[\texttt{ADD}\,x\,(\texttt{PRED}\,y)]\}$

$$
\begin{aligned}
x.0 &= 0 \\
x.(y+1) &= (x.y) + x
\end{aligned}
\qquad
x.y = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ [x.(y-1)] + x & \text{sinon} \end{cases}
$$

$\texttt{MUL}\ x\ y = \texttt{ZERO?}\ y\ 0$
$\qquad\qquad \{\texttt{ADD}\,[\texttt{MUL}\,x\,(\texttt{PRED}\,y)]\ \ x\}$

$$
\begin{aligned}
x^0 &= 1 \\
x^{(y+1)} &= (x^y)\,.y
\end{aligned}
\qquad
x^y = \begin{cases} 1 & \text{si } y = 0 \\ \left(x^{y-1}\right).x & \text{sinon} \end{cases}
$$

$\texttt{POW}\ x\ y = \texttt{ZERO?}\ y\ 1$
$\qquad\qquad \{\texttt{MUL}\,[\texttt{POW}\,x\,(\texttt{PRED}\,y)]\ \ x\}$

$$
\begin{aligned}
0! &= 1 \\
(x+1)! &= x!.(x+1)
\end{aligned}
\qquad
x! = \begin{cases} 1 & \text{si } y = 0 \\ (x-1)!.x & \text{sinon} \end{cases}
$$

$\texttt{FACT}\ x = \texttt{ZERO?}\ x\ 1$
$\qquad\qquad \{\texttt{MUL}\,[\texttt{FACT}\,(\texttt{PRED}\,x)]\ \ x\}$

Trouver X tel que $\mathsf{X}(xy) = x$?
$\mathsf{BX}xy = \mathsf{X}(xy) = x$

$BX = \lambda x \lambda y \,.\, x = \lambda x \,.(Kx) = K$
$X = ?$

Existe-t-il une forêt dans laquelle chaque combinateur A possède un et un seul point fixe X : $\exists ?$ forêt $\mathbb{F}, \forall A \in \mathbb{F}, \exists ! \, X \in \mathbb{F} : \; AX = X$
Existe-t-il une forêt dans laquelle un combinateur X est point fixe pour chaque combinateur A : $\exists ?$ forêt $\mathbb{F}, \exists X \in \mathbb{F}, \forall A \in \mathbb{F} : \; AX = X$

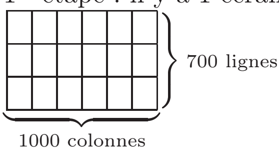
Montrer que $\boxed{B, C, W \text{ et } I \text{ “engendre” la SK-forêt}}$:
$K = \ldots$
$S = B(BW)(BBC)$
Et inversement :
$B = S(KS)K$
$C = S(BBS)(KK) = S\,[S(KB)S]\,(KK) = S\,(S\{K\,[S(KS)K]\}\,S)\,(KK)$
$W = SS(KI) = SS\,[K(SKK)]$
$I = SKK$

Montrer que $\boxed{B, T, M \text{ et } I \text{ “engendre” la SK-forêt}}$:
$K = \ldots$
$S = \ldots$
Et inversement :
$B = S(KS)K$
$T = CI = B(SI)K = S\,[K(SI)]\,K = S\{K\,[S(SKK)]\}\,K$
$M = WI = SII = S(SKK)(SKK)$
$I = SKK$

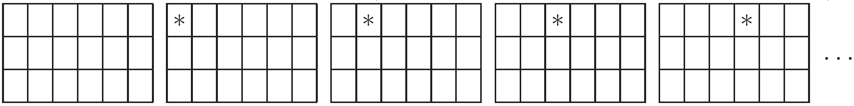
19.2 Expérience devant écran

On se place devant un écran d'ordinateur de 1000 colonnes par 700 lignes, initialement noir. À chaque étape sont dupliqué 1000.700 + 1 = 700 001 fois l'écran et le spectateur, de façon à ce qu'un écran reste tel qu'il est et que les autres allument chacun un pixel différent. On itère très rapidement de telles étapes durant 1h30.

1re étape : il y a 1 écran noir



2^e étape : il y a 700 001 écrans (1 noir et les autres avec 1 pixel allumé)



3^e étape : il y a 700 001^2 écrans (1 noir et les autres avec 1 ou 2 pixels allumés)

...

On vous pose une question avant la première étape :

   À quoi vous attendez-vous ?

À voir :

1. un film des Monty Python
2. un reportage sur Moscou
3. un écran tout noir
4. un écran tout blanc
5. de la neige (white noise)
6. autre chose (quoi ?)
7. je ne sais pas
8. $\ldots \vee \ldots \vee \ldots \vee \ldots$
9. $\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \ldots$

20 Samedi 12 avril 2008 : Duplications

→ `TheolMachine_BMarchal_20_20080412_1_Duplications.mp3` (17, 3 Mo) (1h15'47)
→ `TheolMachine_BMarchal_20_20080412_2_DupliqueEcran.mp3` (10 Mo) (44'02)

Film à voir : *The Prestige*/ *Le Prestige*, 2006
(Christopher Nolan, d'après le roman de Christopher Priest, 1995)

Livre à lire : *The Mind's I*/ *Vues de l'esprit*, 1981/ 1987
(Textes rassemblés par Hofstadter et Dennett)

20.1 Duplications

Étape 1 :

☺ ⟶ ☺ téléportation classique, possible par hypothèse

Étape 2 :

☺ —/D/⟶ ☺ D : délai d'un an

Question posée après expérience : As-tu perçu un délai ?

1re personne : je $\simeq$ subjectif

$\neq$ 3^e personne : il $\simeq$ objectif

Notion de personne : ... ☺ ...

$\underbrace{\text{“histoire”} \qquad \text{“projection”}}_{\text{mémoire}}$

☺ : subit l'évolution naturelle de ce qui arrive

Étape 3 :

☺ → ☺ Washington

☺ → ☺ Moscou

Question posée *avant* expérience : À quoi t'attends-tu ?

À quelle expérience (1re personne) t'attends-tu ?

Où t'attends-tu à te sentir être ?

$W_1 \vee W_2$

$W_1 \wedge W_2$ Je me sentirai à $(W_1 \wedge W_2)$

$\neq$ (Je me sentirai à W_1) $\wedge$ (Je me sentirai à W_2)

Commentaire personnel

Je$_1$ me sentirai à Washington *et* Je$_2$ me sentirai à Moscou.

20.2 Enfer ou paradis

☺ → 1 000 000 de “copies”

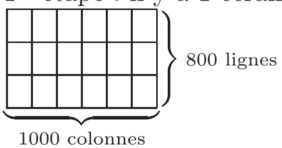
Quelle expérience choisissez-vous parmi ces deux variantes :

1. 1 arrive au paradis, les 999 999 autres sont torturés
2. 999 999 arrivent au paradis, 1 est torturé

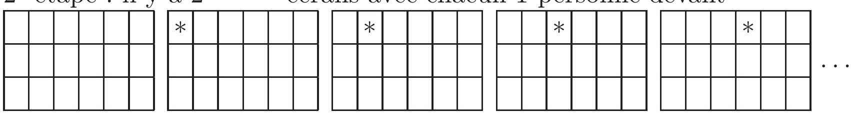
20.3 Duplications d'un écran

Redéfinissons l'expérience avec l'écran d'ordinateur :

1re étape : il y a 1 écran noir et 1 personne devant



2e étape : il y a $2^{800\ 000}$ écrans avec chacun 1 personne devant



À chaque étape (toutes les $1/24^{e}$ de seconde), chaque écran et son spectateur sont dupliqués $2^{800\,000}$ fois.

21 Samedi 19 avril 2008 : λ-expression ; Équations diophantienne

→ `TheolMachine_BMarchal_21_20080419_1_LambdaExEqDioph.mp3` (12, 6 Mo) (55'13)
→ `TheolMachine_BMarchal_21_20080419_2_EqDiophantiennes.mp3` (11, 1 Mo) (48'30)

Rappel de la définition formelle des combinateurs en S et K :
K est un combinateur
S est un combinateur
Si x et y sont des combinateurs alors (xy) est un combinateur
Axiomes : $Kxy = x$
$Sxyz = xz(yz)$

21.1 λ-expression

Un λ-terme est soit :
une λ-variable : $x, y, z, \ldots$
une λ-abstraction :
si x est une λ-variable et u un λ-terme alors $\lambda x.u$ est un λ-terme
une λ-application : si u et v sont des λ-termes alors uv est un λ-terme

$Bxyz = x(yz)$
$B = \lambda x \lambda y \lambda z\,.\,[x(yz)]$

$MM = \cdots = MM$
$M = \lambda x\,.\,(xx)$
$MM = [\lambda x\,.\,(xx)]\,[\lambda x\,.\,(xx)]$

$K \equiv \lambda x \lambda y\,.\,x$
$S \equiv \lambda x \lambda y \lambda z\,.\,[xz(yz)]$

$SA \equiv \{\lambda x \lambda y \lambda z\,.\,[xz(yz)]\}\,A = \lambda y \lambda z\,.\,[Az(yz)]$

$[\lambda x \lambda y\,.\,(+xy)]\,3 = \lambda y\,.\,(+3y)$

21.2 Équations diophantienne

X^{e} problème de Hilbert :
Existe-t-il un algorithme permettant de savoir si les équations diophantiennes admettent des solutions entières ?
Non.

Indécidabilité sur $\mathbb{N}$ $\iff$ Indécidabilité sur $\mathbb{Z}$

Dioph($\mathbb{N}$) $:=${équation diophantienne avec variables $\in \mathbb{N}$}
Dioph($\mathbb{Z}$) $:=${équation diophantienne avec variables $\in \mathbb{Z}$}

Commentaire personnel

Que se passent-ils dans Dioph({entier de GAUSS}) ?

$10x + 21y = 1$
$(x, y) = (-2, 1)$ est une solution

$31x^4yz - 2x^3 + xyz^{41} - 3 = 0$

$6x + 10y = 1$
$6x$ et $10y$ sont pairs, donc ne peuvent donner 1. Donc, pas de solution.

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{Z} : \ a \perp b \iff \exists x, y \in \mathbb{Z} : ax + by = 1}$$

Cf. l'identité de BACHET–BÉZOUT dans [Nombres 1].

Hilary PUTNAM (précurseur du fonctionnalisme) :
Martin DAVIS :
Julia ROBINSON : $\sim$ 1960
ExpDioph($\mathbb{Z}$) (on permet d'utiliser l'exponentielle) est TURING-universel
Yuri MATIYASEVICH : 1970

Commentaire personnel

E est diophantien
$\overset{\triangle}{\iff}$ ($\exists$ polynôme à coefficients entiers P : $n \in E \iff P(n, x_1, \ldots, x_k) = 0$)

Théorème de MATIYASEVICH (1970) :

$$\boxed{E \text{ est diophantien} \iff E \text{ est récursivement énumérable}}$$

"Lemme de MATIJASEVICH" :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}{+}3 : \ F_n^2 \setminus F_m \iff n\, F_n \setminus m}$$

Élimination du ET

$\mathcal{D}_1(x, y)$ un polynôme diophantien en 2 variables

$(3x^2 - 2y + 3xy = 0 \iff 3x^2 + 3xy = 2y)$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \mathcal{D}_1(x, y) = 0 \\ \mathcal{D}_2(x, y) = 0 \end{array}\right| \iff [\mathcal{D}_1(x, y)]^2 + [\mathcal{D}_2(x, y)]^2 = 0}$$

Élimination du OU

$$\boxed{[\mathcal{D}_1(x, y) = 0 \text{ ou } \mathcal{D}_2(x, y) = 0] \iff \mathcal{D}_1(x, y).\mathcal{D}_2(x, y) = 0}$$

Élimination des solutions négatives

$$\boxed{\begin{array}{l}\exists x, y \in \mathbb{Z} : \ \mathcal{D}(x, y) = 0 \\ \iff \exists x, y \in \mathbb{N} : \ \mathcal{D}(x, y).\mathcal{D}(x, -y).\mathcal{D}(-x, y).\mathcal{D}(-x, -y) = 0\end{array}}$$

Réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{l}\exists x, y \in \mathbb{N} : \ \mathcal{D}(x, y) = 0 \iff \exists x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{Z} : \\ \hfill \mathcal{D}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = 0\end{array}}$$

(Cf. théorème des 4 carrés de Lagrange dans [Nombres 1])

Commentaire personnel

1 solution $x, y \in \mathbb{N}$

$\implies$ GR(x).GR(y) solutions $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{Z}$

Ex. : $P(x) = x + 1$

$P(x) = 0 \iff x = -1 \quad \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{Z} : \ P(k) = 0 \iff \exists n \in \mathbb{N} : \ Q(n) = 0 \text{ avec } Q(x) = P(x).P(-x)}$$

$k \longleftrightarrow n$ ou $-n$

Ex. : 1 solution de $P(k) = 0$ pour $k \in \mathbb{Z} : k = -1$

$Q(x) = (x + 1)(-x + 1) = 1 - x^2$

$Q(n) = 0 \iff n = \begin{cases} 1 & \in \mathbb{N} \\ -1 & \notin \mathbb{N} \end{cases}$

2 solutions de $Q(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\exists n \in \mathbb{N} : \ P(n) = 0 \iff \exists k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z} : \ Q(k_1, k_2, k_3, k_4) = 0 \\ \hfill \text{avec } Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = P(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\end{array}}$$

$n \longleftrightarrow k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2$

Ex. : 0 solution de $P(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$

$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 1$

$Q(k_1, k_2, k_3, k_4) = 0 \iff k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = -1 \quad \notin \mathbb{N}$

0 solution de $Q(k_1, k_2, k_3, k_4) = 0$ pour $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$

---

22 Samedi 26 avril 2008 : Duplications

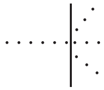
→ `TheolMachine_BMarchal_22_20080426_1_Duplications.mp3` (12, 4 Mo) (54'19)

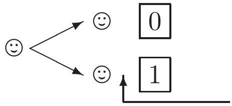
→ `TheolMachine_BMarchal_22_20080426_2_Duplications.mp3` (13, 1 Mo) (57'39)

First person Comp indeterminacy

Subjective uncertainly

Notion de personne : $\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{“mémoire”}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{présent}}}{☺} \underset{\text{“expectative”}}{\overbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}}$





Poser la question ici, avant qu'il ouvre les yeux

Je vais ressentir :
$\mathrm{JVR}(0 \wedge 1) \not\equiv \mathrm{JVR}(0) \wedge \mathrm{JVR}(1)$
$\mathrm{JVR}(0 \vee 1) \equiv \mathrm{JVR}(0) \vee \mathrm{JVR}(1)$

Étapes 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7

23 Samedi 3 mai 2008 : Panorama

→ `TheolMachine_BMarchal_23_20080503_1_Panorama.mp3` (13, 4 Mo) (58'55)
→ `TheolMachine_BMarchal_23_20080503_2_Panorama.mp3` (10, 6 Mo) (46'34)

expdioph

Boolos 1993 (ou ancienne version 1979)

Article de Wallace (British Journal of Philosophy)

Matérialisme faible : il existe une substance indépendante de nous

$0, 1, 2, 3, \ldots$ limité avec vérités (Σ_0) du style $\exists x \exists y \ldots P(x, y, \ldots)$

$\boxed{\text{COMP}}$ P totalement décidable

↓

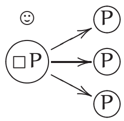
$\boxed{}$

$$\downarrow (\text{Matiyasevich})$$
$$\exists x \exists y \ldots \mathcal{D}(x, y, \ldots) = 0$$

Commentaire personnel

Est-ce que la preuve de Maudlin est aussi une preuve subjective ?

Au niveau ontique on ne met que les $\mathbb{N}$
Au niveau…



$\underset{A}{\sqcup} \longrightarrow \underset{B}{\sqcup}$

En A, on peut prédire avec certitude qu'il y aura une incertitude en B.
Donc l'incertitude est déjà là en A.

$\Box P \wedge \quad P$

$\Box P \wedge \quad \Diamond P \wedge P$

| | |

Je vois P P perdu

Le fantôme de la modalité [21] (Hermann WEYL)

Logique quantique de VON NEUMANN ?

COMP $\wedge \exists$ U.P. $\wedge$ DUC

Univers Physique Déployeur Universel Concret
(hypothèse extravagante)

24 Samedi 10 mai 2008 : Truc *dans* truc ; Déployeur Universel

→ TheolMachine_BMarchal_24_20080510_1_Dans.mp3 (11, 7 Mo) (51'32)
→ TheolMachine_BMarchal_24_20080510_2_DU.mp3 (12, 4 Mo) (54'33)

...

25 Samedi 17 mai 2008 : Duplications

→ TheolMachine_BMarchal_25_20080517_1_Duplications.mp3 (10, 9 Mo) (47'52)
→ TheolMachine_BMarchal_25_20080517_2_Duplications.mp3 (11, 7 Mo) (51'10)

...

Commentaire personnel

"Le **bateau de Thésée** est une expérience de pensée écrite par Stéphane FERRET.

D'après la légende grecque, rapportée par PLUTARQUE, THÉSÉE serait parti d'Athènes combattre le Minotaure. À son retour, vainqueur, son bateau fut préservé par les Athéniens : ils retiraient les planches usées et les remplaçaient – de sorte que le bateau resplendissait encore des siècles plus tard. Alors, deux points de vue s'opposèrent : les uns disaient que ce bateau était le même, les autres que l'entretien en avait fait un tout autre bateau.

Il y a une autre question, corollaire : si on avait gardé les planches du bateau et qu'on l'avait reconstruit plus tard, serait-ce encore le même bateau ?

21. http://www.numdam.org/numdam-bin/fitem?id=MSH_1981__74__37_0

C'est ici, une question sur l'essence et l'identité des choses."

(*Le bateau de Thésée*/ [Wikipédia], 18 mai 2008)

---

26 Samedi 24 mai 2008 : Langage Universel ; Algèbres applicatives

→ `TheolMachine_BMarchal_26_20080524_1_LU.mp3` (15,7 Mo) (1h08'39)
→ `TheolMachine_BMarchal_26_20080524_2_AlgebresApplicatives.mp3` (11,6 Mo) (51'04)

...

27 Samedi 31 mai 2008 : Algèbres applicatives

→ `TheolMachine_BMarchal_27_20080531_1_AlgebresApplicatives.mp3` (11,5 Mo) (50'36)
→ `TheolMachine_BMarchal_27_20080531_2_ThKleene.mp3` (12,8 Mo) (56'02)

Ayant choisi un LU (langage universel) :

$\varphi_i :=$ fonction calculée par le programme P_i
$W_i :=$ dom φ_i

$$\begin{array}{llllllll}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & \text{énumération des naturels} \\
 & \downarrow \text{bijection} & & & & & & \\
P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & \ldots & \text{énumération des programmes} \\
 & \downarrow \text{surjection}^{22} & & & & & & \\
\varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_5 & \ldots & \text{énumération des fonctions calculables} \\
 & \downarrow \text{surjection} & & & & & & \\
W_0 & W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & W_5 & \ldots & \text{énum. des ensembles récursivement énumérables}
\end{array}$$

On appelle énumération acceptable, pour un LU donné, une énumération qui satisfait les deux propriétés qui suivent.

On appelle algèbre applicative toute structure qui satisfait ces deux propriétés :

Ax. 1. $\exists u, \forall i, \forall x$: $\varphi_u(i, x) = \varphi_i(x)$ $\qquad u * < i\ x >= i * x$

$\quad$ | $\quad$ | $\quad$ |
$\quad$ | $\quad$ | $\quad$ données
$\quad$ | $\quad$ logiciel
$\quad$ ordinateur, fonction universelle

Ax. 2. $\exists s, \forall t, \forall x, \forall y :$ $\varphi_t(x, y) = \varphi_{\varphi_s(t,x)}(y)$ $\qquad t * < x\ y > = \varphi_s(t, x) * y$
$\qquad\qquad = (s * < t\ x >) * y$

$\quad$ |
$\quad$ fonction de paramétrisation

22. Comme une infinité de programmes calculent la même fonction, chaque fonction est répétée une infinité de fois dans la liste $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$

Ex. : $\varphi_t = \lambda x \lambda y \, . \, (x + y)$
$\varphi_t(x, y) = [\lambda x \lambda y \, . \, (x + y)] \, (x, y)$
$t = \ulcorner \lambda x \lambda y \, . \, (x + y) \urcorner$
$s(t, 4) = \lambda y \, . \, (4 + y)$

Second théorème de récursion de Kleene
(théorème de "l'auto-référence des programmes") :

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall t, \exists e, \forall y : \ \varphi_e(y) = \varphi_t(e, y) \\ \quad | \\ \ \text{transformation}\end{array}}$$

$e * y = t * < e \ y >$

Démonstration
$\exists s, \forall t, \forall x, \forall y$:
Par TC, $\exists r$:

$$\varphi_t\left(\varphi_s(x, x), y\right) = \varphi_r(x, y) \overset{\text{(Ax. 2)}}{=} \varphi_{\varphi_s(r,x)}(y)$$

Avec $x := r$:

$$\varphi_t\left(\varphi_s(r, r), y\right) = \varphi_{\varphi_s(r,r)}(y)$$

Avec $e := \varphi_s(r, r)$:

$$\varphi_t(e, y) = \varphi_e(y) \qquad \square$$

Comparer avec la deuxième démonstration du théorème du point fixe des combinateurs.

Pour $t = id = \lambda x \, . \, x$ (et φ sans variable) :
$\exists e : \ \varphi_e() = e$

Commentaire personnel

Forme de Rogers du second théorème de Kleene :

$$\boxed{\forall f \text{ calculable}, \exists e, \forall y : \ \varphi_e(y) = \varphi_{f(e)}(y)}$$

Planaires et amibes...

Cf. *Amoeba, Planaria, and Dreaming Machines*[23] (Bruno Marchal)

Machine qui produit une machine égale à elle-même (à un isomorphisme près). Problème que Descartes n'a pas su résoudre.

Vaine tentative naïve : `10) PRINT "10) PRINT "10) PRINT "...`

28 Samedi 7 juin 2008 : Algèbres applicatives ; Logiques modales

→ `TheolMachine_BMarchal_28_20080607_1_ThKleene.mp3` (12, 6 Mo) (55'24)
→ `TheolMachine_BMarchal_28_20080607_2_LogModales.mp3` (13, 2 Mo) (57'43)

23. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal//publications.html

28.1 Second théorème de récursion de Kleene

$\exists e : \varphi_e() = e$
$\exists e, \forall x : \varphi_e(x) = e$
$\exists e, \forall x : \varphi_e(x) = \varphi_x(e)$

Par le théorème de Solovay (qui “encapsule” le second théorème de récursion de Kleene), la logique modale G capture complètement et sainement tout le discours au niveau propositionnel de la machine.

G capture l'auto-référence

C'est une mathématique : il y a le 1er et le 2e ordre G_q

G est décidable

28.2 Logiques modales

Cf. [Abrégé Logique]

Langage : $p, q, r, \ldots$
$\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, (,)$
$\Box, \Diamond$
$\Diamond := \neg\Box\neg$

$\vee\, p(($ n'est pas une formule
$(p \vee p) \wedge q$ est une formule

Logique temporelle : $\Box$:= toujours
$\Diamond$ = parfois

S5
$\Big|\, 2^{\aleph_0}$
S4Grz

$\Box$:= nécessaire
$\Diamond$ = possible

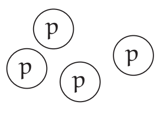
$\Box p$ = croire p savoir p prouver p
$\Diamond p$ =

Les logiques modales ne sont pas vérifonctionnelles : il n'y a pas de table de vérités. Donc soit démonstration, soit autre sémantique.

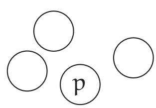
28.2.1 Sémantique de Leibniz

Leibniz reprend la logique modale d'Aristote et défini la sémantique des mondes possibles.

$\Box p \overset{\triangle}{\iff} p$ est vrai dans tous les mondes



$\Diamond p \iff \exists$ monde dans lequel p est vrai



Dans la sémantique de LEIBNIZ :

[T]	$\Box p \longrightarrow p$	tautologie	(de FEYS - VON WRIGHT)
[4]	$\Box p \longrightarrow \Box\Box p$	tautologie	
[triv]	$p \longrightarrow \Box p$	**pas** tautologie	(triviale)
[K]	$\Box(p \to q) \longrightarrow (\Box p \to \Box q)$	tautologie	(de KRIKPKE)
[5]	$\Diamond p \longrightarrow \Box\Diamond p$	tautologie	(capture la sém. de LEIBNIZ)
[B]	$p \longrightarrow \Box\Diamond p$	tautologie	(de BROUWER)
[D]	$\Box p \longrightarrow \Diamond p$	tautologie	(déontique)
[L]	$\Box(\Box p \to p) \longrightarrow \Box p$	**pas** tautologie	(de LÖB)
[C]	$\Diamond p \longrightarrow \neg\Box\Diamond p$	**pas** tautologie	

LEWIS : Systèmes S1, S2, S3, S4, S5
S4, S5 admettent une sémantique de KRIPKE

Théorèmes de complétude et de correction.

K, T, 5 ; MP, NEC
K, T, 4, B ; MP, NEC

Règles d'inférences :

Modus ponens [MP] : $\dfrac{\overset{\vdots}{A} \quad \overset{\vdots}{A \to B}}{B}$ Nécessitation [NEC] : $\dfrac{\overset{\vdots}{A}}{\Box A}$

$$\dfrac{\overset{\vdots}{A \to B}}{\Box A \to \Box B}$$

28.2.2 Logiques de la connaissance, de la croyance, de la prouvabilité

Connaissance	**Croyance**	**Prouvabilité**
$\Box p \to p$	non	non GÖDEL : $\Box\bot \to \bot$ $\Longleftrightarrow \neg\Box\bot \Longleftrightarrow \Diamond\top$
$\Box p \to \Box\Box p$ 1er niveau d'introspection d'une machine	$\Box p \to \Box\Box p$	$\Box p \to \Box\Box p$ Si était fausse, on aurait : $\Box p \wedge \Diamond\neg\Box p$
$\Box(p \to q) \longrightarrow (\Box p \to \Box q)$ Loi d'omniscience (retirée en AI)	$\Box(p \to q) \longrightarrow \dots$	$\Box(p \to q) \longrightarrow \dots$
C'est du "*sachable*" plutôt que du *su*		
Axiomes : S4 Règles d'inférences : MP, NEC	K4 ou K4D MP, NEC	Logique G : KL MP, NEC

28.2.3 Logique G

Logique G : $\left|\begin{array}{l}\text{Axiomes : K, L}\\ \text{Règles d'inférences : MP, NEC}\end{array}\right.$

[L] $\Box(\Box p \to p) \longrightarrow \Box p$ (formule "de modestie")
Effet placebo arithmétique
Croyance de la machine

$\Box(\Box\bot \to \bot) \longrightarrow \Box\bot$	[L] avec $\bot$
$\Box(\neg\Box\bot) \longrightarrow \Box\bot$	car $(A \to \bot) \longleftrightarrow \neg A$
$\Box\Diamond\top \longrightarrow \neg\Diamond\top$	$\leftrightarrow$ [C] avec $\top$
$\Diamond\top \longrightarrow \Diamond\Box\bot$	par contraposition

Si je tiens debout alors je peux m'écrouler

"La conscience, c'est le pressentiment de la vérité accessible par un homme."
(Dostoïevski) (cf. [Secret amibe] p. 81)

Annexes

Liste des personnalités évoquées

~ −428 – ~ −347 : Platon

~ −385 – −322 : Aristote

après −150 – avant 350 (prob. IIe – IIIe) : Diophante d'Alexandrie

~ 205 – ~ 270 : Plotin

354 – 430 : saint Augustin

~ 370 – 415 : Hypatie

412 – 485 : Proclus

~ 480 – ? : Damascius le Diadoque

~ 1170 – ~ 1250 : Leonardo Fibonacci (Léonard de Pise)

1581 – 1638 : Claude-Gaspard Bachet de Méziriac

1596 – 1650 : René Descartes

1601 – 1665 : Pierre de Fermat

1623 – 1662 : Blaise Pascal

1642 – 1727 : Isaac Newton

1646 – 1716 : Gottfried Wilhelm Leibniz

1724 – 1804 : Emmanuel Kant (Immanuel)

1730 – 1783 : Étienne Bézout

1736 – 1813 : Louis, comte de Lagrange

1749 – 1827 : Pierre Simon, marquis de Laplace

1777 – 1855 : Carl Friedrich Gauss

1792 – 1871 : Charles Babbage

1803 – 1855 : Charles Sturm

1809 – 1882 : Joseph Liouville

1815 – 1852 : Ada Lovelace

1821 – 1881 : Fiodor Mikhaïlovitch Dostoïevski

1823 – 1891 : Leopold Kronecker

1845 – 1918 : Georg Cantor

1848 – 1925 : Gottlob Frege

1854 – 1912 : Henri Poincaré

1858 – 1932 : Giuseppe PEANO
1859 – 1943 : Mangasar Magurditch MANGASARIAN
1861 – 1947 : Alfred North WHITEHEAD
1862 – 1943 : David HILBERT
1862 – 1956 : Jules Antoine RICHARD
1871 – 1953 : Ernst ZERMELO
1871 – 1956 : Émile BOREL
1872 – 1970 : Bertrand RUSSELL
1878 – 1957 : Leopold LÖWENHEIM
1881 – 1966 : Luitzen BROUWER
1885 – 1955 : Hermann WEYL
1887 – 1963 : Albert SKOLEM
1889 – 1942 : Moses SCHÖNFINKEL
1889 – 1961 : Robert FEYS
1891 – 1965 : Abraham Adolf FRAENKEL
1897 – 1954 : Emil POST
1898 – 1970 : Arthur Herbert COPELAND
1900 – 1982 : Haskell CURRY
1901 – 1981 : Jacques LACAN
1902 – 1983 : Alfred TARSKI
1902 – 1994 : Karl POPPER
1903 – 1957 : Johann (ou John) VON NEUMANN
1903 – 1988 : Kurt MAHLER
1903 – 1995 : Alonzo CHURCH
1904 – 1943 : Mojżesz PRESBURGER
1906 – 1978 : Kurt GÖDEL
1909 – 1994 : Stephen Cole KLEENE
1911 – 1995 : Raphael M. ROBINSON
1912 – 1954 : Alan Mathison TURING
1912 – 1986 : Jean VAN HEIJENOORT
1912 – 2000 : David Gawen CHAMPERNOWNE
1913 – 1996 : Paul ERDÖS
1915 – 1973 : Alan WATTS

1916 – 2003 : Georg Henrik von Wright

1919 – 1985 : Julia Robinson

1919 – : Raymond Smullyan http://www.indiana.edu/~phil/Faculty/Individual Pages/Smullyan.html

1921 – 2006 : Martin Hugo Löb

1926 – : Hilary Putnam

1928 – : Martin Davis http://www.cs.nyu.edu/cs/faculty/davism/

1934 – 2007 : Paul Cohen

1937 – : John Horton Conway

1938 – : Manuel Blum

1940 – 1996 : George Stephen Boolos

1940 – : Saül Kripke

1941 – : Lambros Couloubaritsis

1942 – : Daniel Clement Dennett

1943 – : Christopher Priest

1945 – : Douglas Hofstadter

1947 – : Hendrik Pieter (Henk) Barendregt

1947 – : Yuri Matiyasevich (Matijasevitch) http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/

1949 – : Slavoj Žižek

1950 – 2006 : Torkel Franzén

1955 – : William Hugh Woodin

1970 – : Christopher Nolan

? – : David H. Bailey 1996, 2001

? – : G. G. Berry

? – : Richard E. Crandall 2001

? – : Nigel J. Cutland 1980

? – : William Alvin Howard 1965

? – : C.I. Lewis 1910

? – : Tim Maudlin 1989, 1994

? – : H. Rogers

? – : J.C. Shepherdson 1947, 1963, 1965, 1987, 1989

? – : Robert Martin Solovay 1964, 1976

? – : H.E. Sturgis 1963

Theory of [Everything] List

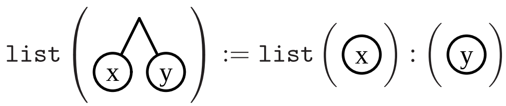
Archives everything-list :
http://www.mail-archive.com/everything-list@eskimo.com/ ...
Bijections (was OM = SIGMA1) : msg13962.html
Re: Bijections (was OM = SIGMA1) : msg13986.html
Re: Bijections (was OM = SIGMA1) : msg13991.html
Cantor's Diagonal : msg13996.html

Module `combinator.py` [24] du paquetage DSPython

$\texttt{list} : \{\text{combinateur}\} \longrightarrow \{\text{liste non vide de combinateurs}\}$

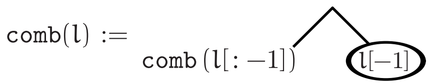
$\texttt{list}(x) := (x) \quad \text{si } x \text{ atomique}$

$\texttt{list}(xy) := \texttt{list}(x) : (y)$

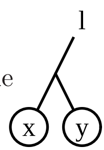


$\texttt{comb} : \{\text{liste non vide de combinateurs}\} \longrightarrow \{\text{combinateur}\}$

$$\texttt{comb}(l) := \begin{cases} l[0] & \text{si } \texttt{len}(l) = 1 \\ \texttt{comb}\,(l[:-1])\ l[-1] & \text{si } \texttt{len}(l) > 1 \end{cases}$$



Évaluation de

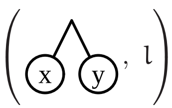


"dans l'ordre" :

$$\forall k \in \mathbb{N}_* :\ v_k(xy, l) := \begin{cases} v_{k-1}\,(v_k(x, (y) : l), ()) & \text{si } x \text{ non stable} \\ v_{k-1}\,(x\ v_k\,(y, ())\,, l) & \text{si } x \text{ stable mais } y \text{ pas} \\ xy\ v_k\,(l[0], l[1:]) & \text{si } x \text{ et } y \text{ stables} \end{cases}$$

$v_0(x, l) := x : l$

? v_k



$$:= \begin{cases} v_{k-1}\left(v_k\left(x,\ (y) : l\right), ()\right) \\ v_{k-1}\left(x\ v_k\left(y, ()\right), l\right) \\ x\ y\ v_k\,(l[0], l[1:]) \end{cases}$$

? à corriger ?

"Lien" avec les langages fonctionnels : $(o\ l)$: opérateur, liste d'arguments

24. http://www.opimedia.be/DS/DSPython/index.htm#combinator

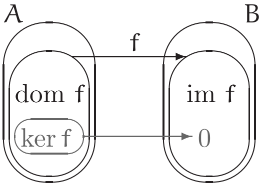
chutier

"Au-delà de la critique de la notion de principe et de l'apophatisme [sic ?] qui en résulte, ce sont les contradictions dans lesquelles le langage est voué à s'enfoncer lorsqu'il tente de cerner et de déterminer par le discours un absolu pré-discursif et au fondement même de tout discours, qui retient le plus l'attention des chercheurs actuels." (DAMASCIUS le Diadoque/ [Wikipédia])

"**apophantique** adjectif Philosophie Se dit d'un énoncé qui peut être dit vrai ou faux." ([Larousse])

"**extensionnel**, **extensionnelle** adjectif Logique Se dit de ce qui satisfait à la totalité des propriétés définies à l'intérieur d'un champ conceptuel (par opposition à intensionnel)." ([Larousse])
"**intensionnel**, **intensionnelle** adjectif Logique Se dit de tout énoncé qui ne satisfait pas aux propriétés définies à l'intérieur d'un champ conceptuel donné (par opposition à extensionnel).
Remarque Ne pas confondre avec intentionnel." ([Larousse])

Théorie de la calculabilité : traditionnellement appelée théorie de la récursion.



Fonction f de A dans B notée, $f : A \longrightarrow B$
Domaine (de définition) de f : dom $f := \{x \in A \mid \exists y \in B : \ f(x) = y\} \quad \subseteq A$
Image de f : im $f := f(\text{dom } f) = \{f(x) \mid x \in \text{dom } A\} \quad \subseteq B$
Noyau de f : ker $f := \{x \in \text{dom } f \mid f(x) = 0\} \quad \subseteq \text{dom } f$

Fonction (strictement) partielle $f : A \longrightarrow B$: telle que dom $f \subset A$

Application f de A dans B : fonction partout définie (totale)
(c.-à-d. telle que dom $f = A$)
$B^A := \{\text{application } A \longrightarrow B\} \quad \subseteq \{\text{fonction } A \longrightarrow B\}$

$f_\emptyset$:= l'"unique" fonction définie nulle part (c.-à-d. telle que dom $f_\emptyset = \emptyset$)
$\ker f_\emptyset = \text{dom } f_\emptyset = \emptyset = \text{im } f_\emptyset$

Références

[Abrégé Logique] Olivier PIRSON,
Abrégé de Logiques Classiques[25]. 66

[Computability] Nigel J. CUTLAND,
Computability: A introduction to recursive function theory.
Cambridge University Press, 2000, 1st edition 1980. x+252 pages. 17, 21

[SHEPHERDSON – STURGIS] J.C. SHEPHERDSON, H.E. STURGIS,
Computability of Recursive Functions. 1961. 17

[CandiULB] BrunoMarchal,
Cours de logique et informatique théorique 2005 – ...
Forum CandiULB, 1er octobre 2005 – ...
Théologie des Machines,
Séminaire de Bruno Marchal 2007 – 2008[26].
Forum CandiULB, 3 décembre 2007 – ... 2

[Fractions continues] Olivier PIRSON,
Fractions continues et approximations de nombres irrationnels[27].
Travail scolaire, juin 1993. 6

[MathWorld] **MathWorld**[28]. 16

[Secret amibe] Bruno MARCHAL,
Le secret de l'amibe[29].
19 mai 2000. 68

[Nombres 1] Olivier PIRSON,
Les Nombres : Science • Art • Théologie :
1re partie : Théologie grecque, Sommes et différences[30].
Notes à partir du séminaire 2006 – 2007 de Bruno MARCHAL. 9, 10, 60, 61

[Nombres 2] Olivier PIRSON,
Les Nombres : Science • Art • Théologie : 2e partie ...[31]
Notes à partir du séminaire 2006 – 2007 de Bruno MARCHAL. 18

[OEIS] **L'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers**[32].
{*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.} 6, 10, 21

[Larousse] ***Petit Larousse***, 2007. Larousse, 2006. 13, 51, 73

25. http://www.opimedia.be/logiques/
26. http://www.candiulb.be/forum/index.php?showtopic=37463
27. http://www.opimedia.be/grenier/index.htm#FractionsContinues
28. http://mathworld.wolfram.com/
29. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/prixlemonde/SApageWEBbest.pdf
30. http://www.opimedia.be/Bruno_Marchal/index.htm#Nombres1
31. http://www.opimedia.be/Bruno_Marchal/index.htm#Nombres2
32. http://oeis.org/?language=french

[Mathematics Genealogy] **The Mathematics Genealogy Project**[33].

[Everything] Theory of Everything List[34].
Archives **everything-list**[35]. 17, 26, 72

[Wikipédia] **Wikipédia**[36], l'encyclopédie libre. 10, 12, 13, 14, 15, 33, 64, 73

[Wikipedia] **Wikipedia**, The Free Encyclopedia. 16

33. http://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/
34. http://groups.google.com/group/everything-list
35. http://www.mail-archive.com/everything-list@eskimo.com/
36. http://fr.wikipedia.org/

Index

Table des matières

$\mathcal{DS}$TEX*tes*

mis en page sous DSTEX
le 8 janvier 2012
http://www.opimedia.be/DS/