

LES NOMBRES

Science • Art • Théologie

Séminaire donné par
Bruno MARCHAL¹
2006 – 2007 (IRIDIA/ CEY²)

“Science

Nous illustrerons l’infinie richesse des nombres et des relations qu’ils ont entre eux à travers une suite de théorèmes accompagnés de démonstrations et d’illustrations.

Art

Les multiples apparitions du nombre d’or et des nombres d’argent. Les suites musicales de KINDERMANN et autres quasi auto-similarités chaotiques numériques.

Théologie

La théologie grecque de PYTHAGORE (environ -500 av. J.-C.) à PROCLUS (environ 500 ap. J.-C.) avec une emphase particulière sur PLOTIN (environ 250 ap. J.-C.) et son traité sur les nombres. Comment le computationnalisme en science cognitive dégage une interprétation arithmétique des hypostases de PLOTIN y compris celles censées décrire la matière, et comment peut-on les tester en les comparant à la théorie quantique contemporaine.”

2^e partie...

Notes d’Olivier PIRSON
olivier_pirson_opi@yahoo.fr
<http://www.opimedia.be/>

mardi 13 avril 2010

1. <http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/>
2. <http://www.ulb.ac.be/cepsy/>

À propos de ce document

Ce document est la suite – très fragmentaire – de *Les Nombres : Science • Art • Théologie : 1^{re} partie : Théologie grecque, Sommes et différences*³.

Ne vous fiez pas à l'aspect propre de ce carnet. Son contenu est une succession de notes brouillonnes (prises lors du séminaire de Bruno MARCHAL), souvent incomplètes et non retravaillées.

Le tout n'engage que moi, et est livré tel quel, sans garantie.

Olivier PIRSON

1 Samedi 25 novembre 2006 : Différences finies

... Cf. [Nombres 1]

2 Samedi 2 décembre 2006 : Fonctions, diagonalisations

...

3 Samedi 9 décembre 2006 : Théorème de CANTOR

...

4 Samedi 16 décembre 2006 : Ordinaux transfinis

...

5 Samedi 30 décembre 2006 : Identité de JACOBI

... Cf. [Nombres 1]

6 Samedi 6 janvier 2007 : Théorème de JACOBI ; diagonalisations

...

3. [Nombres 1]

7 Samedi 20 janvier 2007 : Fonctions calculables

...

Commentaire personnel

Une fonction est **totale** (partout définie) ou **partielle** (non partout définie).

Une **application** est une fonction partout définie.

Une **bijection** est une application bijective.

Une fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est **calculable**

\Leftrightarrow il existe un langage
 dans lequel on peut décrire de façon **finie** comment calculer f
 $\forall n \in \text{dom } f$: le calcul de $f(n)$ est fini

A est **énumérable** (ou infini dénombrable) $\Leftrightarrow \exists$ bijection : $\mathbb{N} \dashrightarrow A$

A est **rékursivement énumérable** $\Leftrightarrow \exists$ bijection calculable : $\mathbb{N} \dashrightarrow A$

$A \subseteq \mathbb{N}$ est **rékursif** $\Leftrightarrow A$ et $\mathbb{N} \setminus A$ sont rékursivement énumérable

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{R} \simeq 2^{\mathbb{N}}$ sont non énumérables

$\#\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0}$

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|_{\text{calculable}} := \{\text{application calculable : } \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$ est énumérable
 mais non rékursivement énumérable

$\{\text{fonction calculable : } \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$ est rékursivement énumérable



8 Samedi 27 janvier 2007 : Ensembles rékursifs

...

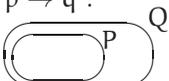
Commentaire personnel

formel : “1 – qui est formulé précisément 2 – qui s’occupe de l’aspect extérieur plus que du contenu 3 – qui concerne la structure, la relation entre éléments 4 – qui privilégie les formes 5 – qui est énoncé pour la forme, pour le principe” ([Universalis])

9 Samedi 3 février 2007 : Plan et logiques

...

$p \rightarrow q$:



L’ensemble des mondes dans lesquels p est vrai est inclus dans l’ensemble des mondes dans lesquels q est vrai.

Dans *Principia mathematica*, RUSSELL notait $p \supset q$ pour $p \rightarrow q$!

Cette implication \rightarrow ne correspond pas à la notion de causalité. Si on cherche un opérateur binaire tel que seulement le vrai “implique” le vrai, on tombe sur la conjonction \wedge . Mais $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$!

La nécessité est une forme d’implication causale dans la sémantique de KRIPKE.

$\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow p$ \vdots dans la logique G?
 $\frac{\Box p \rightarrow p}{p}$

10 Samedi 10 février 2007 : Les 8 hypostases

Thèse de Bruno MARCHAL :

UDA (Universal Dovetailer Argument) :

UD (Universal Dovetailer)

COMP : hypothèse du computationnalisme c.-à-d. :

- yes doctor : nous sommes des machines
 (~ hypothèse de DESCARTES) digitales
- TC : Thèse de CHURCH
- réalisme arithmétique

COMP \implies la physique est une branche de la théorie des nombres

C’est un *mathématicalisme*, par opposition au physicalisme.

mathématicalisme : “en philosophie, doctrine considérant les méthodes mathématiques comme essentielles à la compréhension de tout domaine” ([Universalis])

physicalisme : “en philosophie, doctrine empiriste considérant le langage scientifique comme universel et pouvant s’appliquer aux sciences humaines” ([Universalis])

Le COMP dit de lui-même qu’il est indémontrable.

« Dieu a créé les entiers, le reste est un rêve des nombres entiers. »

(Bruno MARCHAL)

AUDA (Arithmetical UDA) : ~ interview de la machine lôbienne

On peut traduire UDA dans le langage des machines universelles.

Démonstration presque constructive : amène à la manière d’extraire la physique de la théorie des nombres, de la théorie de l’auto-référence des machines universelles.

Un livre de James R. BROWN sur les expériences par la pensée (*The Laboratory of the Mind: Thought Experiments in the Natural Sciences*) :

exemple de la réfutation par GALILÉE de l'hypothèse d'ARISTOTE selon laquelle une boule d'un kg de plomb tomberait plus vite qu'un kg de plume. L'idée est d'attaché les deux...

Bew(Γp^\neg) défini dans : $\exists, (\forall), \wedge, \vee, \rightarrow, s, 0, +, \times$

Théorème de GÖDEL : $\neg \text{Bew}(\Gamma \perp^\neg) \rightarrow \neg \text{Bew}(\neg \text{Bew}(\Gamma \perp^\neg))$

Si je suis consistant alors il est impossible de prouver que je le suis

$$\diamond \xleftrightarrow{\Delta} \neg \square \neg$$

$$\neg \square \perp \rightarrow \neg \square \neg \square \perp$$

$$\diamond \top \rightarrow \neg \square \diamond \top$$

$$\diamond \top \rightarrow \diamond \square \perp$$

$$\square \perp \vee \diamond \square \perp$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

Il existe une preuve du faux ou il est consistant qu'il existe une preuve du faux.

La consistance de soi est un indécidable.

Formule de KRIPKE [K] $\square(p \rightarrow q) \rightarrow (\square p \rightarrow \square q)$ (~ elle comprend le MP)

$K \leftrightarrow [\square(p \rightarrow q) \wedge \square p] \rightarrow \square q$ $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \leftrightarrow [(A \wedge B) \rightarrow C]$

$\diamond p \rightarrow \neg \square \diamond p$

$$\neg \square \perp \leftrightarrow (\square \perp \rightarrow \perp)$$

$\square(\square \perp \rightarrow \perp)$ est faux

$\square p \rightarrow p$: correctitude de la machine (incorrigibilité dans la logique du savoir)

$\square(\square p \rightarrow p)$ est faux

Formule de LÖB [L] $\square(\square p \rightarrow p) \rightarrow \square p$

Prouver du point de vue de la machine c'est une croyance.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \square p \rightarrow p \end{array}}{p} ?$$

Règles d'inférences : modus ponens MP : $\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ p \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ p \rightarrow q \end{array}}{q}$

nécessitation NEC : $\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ p \end{array}}{\square p}$ (Y a-t-il une "règle" qui fait le "contraire"?)

[4] $\square p \rightarrow \square \square p$?

Logique G : Axiomes : $\left| \begin{array}{l} K \\ L \end{array} \right.$

Règles d'inférences : $\left| \begin{array}{l} MP \\ NEC \end{array} \right.$

$L \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box \Box p)$

$\exists n P(n) \rightarrow \Box \exists n P(n)$

$p \rightarrow \Box p \iff$ être universel

PA est löbienne

(FEYS et CURRY : logique combinatoire)

Formule de FEYS [t] $\Box p \rightarrow p$ (Elle n'est pas prouvable par la machine.)

Supposons une machine :

- consistante : $\neg \Box \perp \leftrightarrow \Diamond \top$
- correcte : $\Box p \rightarrow p$

$\Box p \leftrightarrow \Box p \wedge p$ est vrai mais non dénombrable

$\Box p := \Box p \wedge p$ savoir

\Box n'est pas définissable dans le langage de la machine.

----- Commentaire personnel -----

Essayer par l'absurde : prenons $\Box p \leftrightarrow \Box p \wedge p$ et ...

$\Box p \rightarrow \Diamond p$ est faux, car sinon $\frac{\Box p \rightarrow \Diamond p}{\Box \top \rightarrow \Diamond \top}$

$\Box p := \Box p \wedge \Diamond p$

Théorème de SOLOVAY : G capture complètement la partie prouvable de la logique de prouvabilité de la machine.

Logique G^* : Axiomes : $\left| \begin{array}{l} \text{tous les théorèmes de G} \\ \text{t} \end{array} \right.$

Règle d'inférence : MP

Si on prenait aussi NEC dans G^* , on aurait :

$\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$

$\Box(\Box \perp \rightarrow \perp) \rightarrow \Box \perp \iff \Diamond \top \rightarrow \Diamond \Box \perp$

$\Box p \rightarrow p$

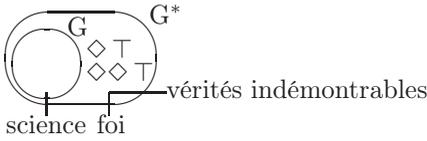
$\Box \perp \rightarrow \perp$

$\Box(\Box \perp \rightarrow \perp)$

Par MP : $\Box \perp$

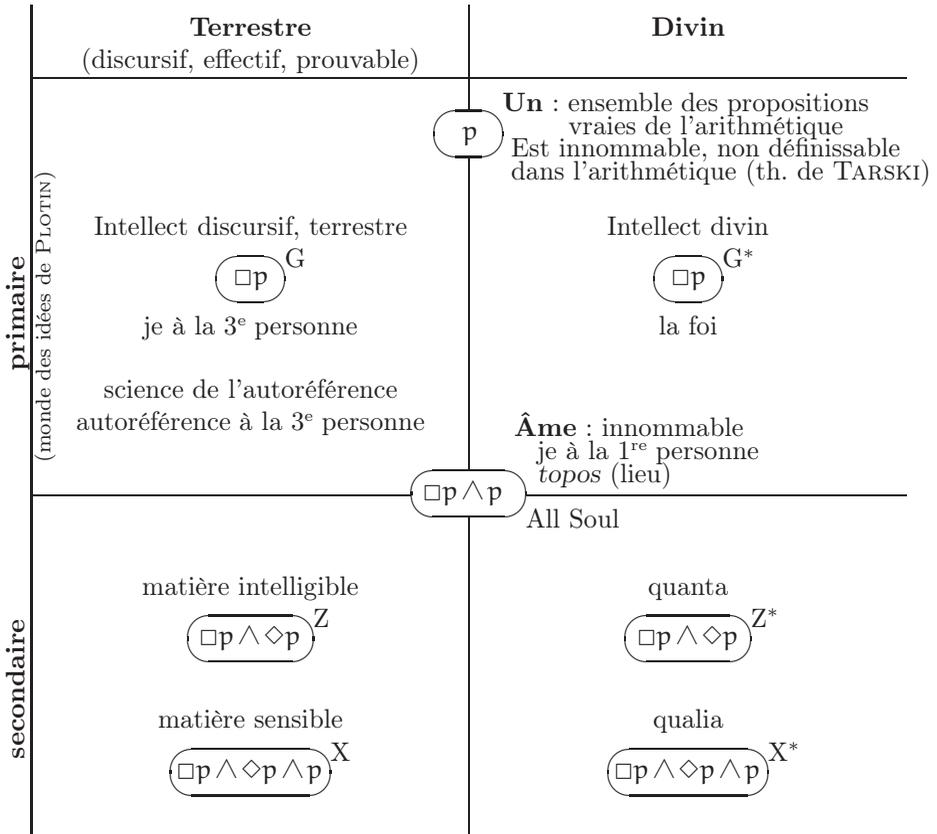
Par MP : \perp KO

G^* serait inconsistante



(Question de définir LISP en LISP
 ≠ Question de code LISP qui s'autoduplique)

- PLOTIN : • Un
 • Intellect
 • Âme



C'est dans la matière intelligible que l'on doit pouvoir tester la théorie par comparaison avec la physique.

Commentaire personnel

Le je à la première personne est un *nous* ?..

“Du grec *Noûs*, l'Esprit, la Pensée, l'Intelligence suprême.”? (*Les Présocratiques*)

“La conséquence est que la science n’atteint pas les choses elles-mêmes, comme le pensent les dogmatismes naïfs, mais les rapports entre les choses; en dehors de ces rapports, il n’y pas de réalité connaissable.” (*La science et l’hypothèse*/ Henri POINCARÉ)

aléthique : “adj. Log. Se dit d’une proposition ou d’une modalité qui ne concerne que le vrai, le faux et l’indéterminé (par opp. à *déontique*).” ([Larousse])

déontique : “adj. Log. *Logique déontique* : étude systématique des propriétés formelles vérifiées par des notions juridiques comme celles de droit et d’obligation (par opp. à *aléthique*).” ([Larousse])

innommable : “adj. Trop vil, trop dégoûtant pour être nommé; inqualifiable. *Crime innommable*.” ([Larousse]) :-)

Est-ce une théorie du physicien ?

Que se passe-t-il lorsque deux machines löbiennes se parlent ? Elles peuvent croire le G^* de l’autre.

Croire \neq écouter la croyance.

Démontrer : Croire (non réfutation) :

$\square p$ $\diamond p := \neg \square \neg p$

Savoir :

$\square p := \square p \wedge p$ $\diamond p := \neg \square \neg p$
 $\leftrightarrow \diamond p \vee p$

$\boxtimes p := \square p \wedge \diamond p$ $\diamond p := \neg \boxtimes \neg p$
 $\leftrightarrow \diamond p \vee \square p$

$\boxplus p := \square p \wedge \diamond p \wedge p$ $\diamond p := \neg \boxplus \neg p$
 $\leftrightarrow \diamond p \vee \square p \vee p$

$\boxminus p := \square p \vee p$ $\diamond p := \neg \boxminus \neg p$
 intuition? $\leftrightarrow \diamond p \wedge p$

$\neg \square \square p$: je ne peux pas démontrer que je sais p

$\leftrightarrow \diamond \neg \square p$: possible que je ne sache pas p

$\leftrightarrow \diamond \diamond \neg p$: possible que

$\leftrightarrow \diamond (\diamond \neg p \vee \neg p)$

croire := $\square p \wedge \neg \square \square p$

11 Samedi 17 février 2007 : Information quantique

Ordinateur classique :

1 bit : 0 ou 1

unité d'information classique

(logique booléenne de LEIBNIZ d'après la philosophie chinoise du *Yiking*)

Pour l'information quantique on exige une totale réversibilité.

⇒ Ce qui devrait permettre un traitement, un calcul, sans consommation d'énergie!

EPR : EINSTEIN–PODOLSKI–ROSEN

1 qubit :

Histoire de la physique quantique :

1900 : PLANCK

1927 : congrès Solvay : dispute BOHR–EINSTEIN sur la nature de la réalité physique

matière : lumière :

particule	particule	NEWTON
particule	onde	HUYGENS (fentes de YOUNG)
	onde/particule	EINSTEIN (effet photoélectrique)

...

Commentaire personnel

◇ T : “La conscience, c’est le pressentiment de la vérité accessible par un homme.”
(DOSTOÏEVSKI) (cf. [Secret amibe] p. 81)

12 Samedi 24 février 2007 : Théorie des nœuds

... Cf. [Liens]

Commentaire personnel

En mathématique, un **nœud** est une ficelle élastique incassable sans épaisseur dont les deux bouts sont collés on ne sait où.

À ne pas confondre avec les nœuds quotidiens, qui eux servent à attachés ensemble deux bouts de ficelle.

*Knots and Physics*⁴ et *Knots and Applications*⁵ (Louis H. KAUFFMAN)

4. <http://books.google.com/books?id=msMVUefjjnoC>

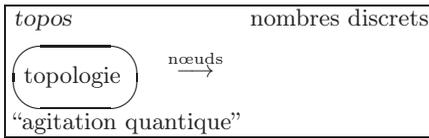
5. <http://books.google.com/books?id=3GiVPAyqZKwC>

13 Samedi 3 mars 2007 : Théorie des nœuds

...

Commentaire personnel

Lien = “multi-ensemble” de nœuds.



Âme \simeq loi, donc bien unique.

14 Samedi 10 mars 2007 : Polynôme A de KAUFFMAN

...

15 Samedi 17 mars 2007 : Rappels sur les nœuds

...

16 Samedi 24 mars 2007 : Synthèse pour la suite

...

Commentaire personnel

Presque toutes les possibilités ne seront pas.

Prenez un chat vivant et une boîte opaque pouvant le contenir. Endormez-le ou tuez-le (selon votre bon plaisir), placez-le dans la boîte, fermez-la et quittez la pièce. Le tout à mon insu. Lorsque j’arrive je *sais* (crois) que la boîte contient un chat mort *ou* vivant. Mais je dois *penser* la situation dans laquelle il est mort *et* la situation dans laquelle il est vivant.

17 Samedi 31 mars 2007 : Invariant de KAUFFMAN

...

18 Samedi 7 avril 2007 :
Théorème d'ALEXANDER, tresses

Théorème d'ALEXANDER : Tout nœud/ lien est enroulable.

...

19 Samedi 14 avril 2007 : Groupe des tresses

...

20 Samedi 21 avril 2007 :
Liens avec la mécanique quantique

...

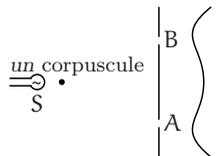
21 Samedi 28 avril 2007 :
Expériences quantiques des fentes

...

22 Samedi 5 mai 2007 : Produit scalaire

$$P_{SE} = P_{SB} \cdot P_{BE} + P_{SA} \cdot P_{AE}$$

|
|
|
 et ou et



$$A_{SE} = A_{SB} \cdot A_{BE} + A_{SA} \cdot A_{AE}$$

BORN : $P = A^2$

Si A complexe alors $P = |A|^2$

À un état physique il faut associer un vecteur \vec{S} (abstrait dans un espace abstrait)

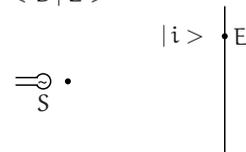
État physique : $|S\rangle$ (notation de DIRAC)

$$A_{sa} = (|s\rangle, |a\rangle) = \langle s | a \rangle$$

$$\langle S | E \rangle = \langle S | A \rangle \cdot \langle A | E \rangle + \langle S | B \rangle \cdot \langle B | E \rangle$$

$$\langle S | E \rangle = \sum_i \langle S | i \rangle \cdot \langle i | E \rangle$$

$$|\langle S | E \rangle|^2 = \left| \sum_i \langle S | i \rangle \cdot \langle i | E \rangle \right|^2$$



22.1 Produit scalaire de vecteurs

Un **groupe** $(G, *)$ est un ensemble muni d'une loi $*$ partout définie, tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x, y, z \in G : (x * y) * z = x * (y * z) \quad (\text{associative}) \\ \exists e \in G, \forall x \in G : x * e = x = e * x \quad (\text{il existe un neutre noté } e) \\ \forall x \in G, \exists y \in G : x * y = e = y * x \quad (\text{symétrisable}) \end{array} \right.$$

Si la loi $*$ est commutative ($\forall x, y \in G : x * y = y * x$) on dit que le groupe est commutatif.

Exemples : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, (\mathbb{Q}_*, \cdot) de neutre 0, 0, 1

Un **corps** (field) $(F, +, \cdot)$ est un ensemble muni de deux lois $+$ et \cdot partout définies, tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (F, +) \text{ est un groupe commutatif de neutre noté } 0 \\ (F \setminus \{0\}, \cdot) \text{ est un groupe} \\ \cdot \text{ est distributive sur } + : \forall x, y, z \in F : \end{array} \right. \begin{array}{l} x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \\ = x \cdot (y + z) \end{array}$$

Exemples : $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ de neutre 0 pour $+$ et 1 pour \cdot .

$\forall p$ premier : \mathbb{Z}_p admet une structure de corps

d'espace vectoriel fini

$$4 + 3 = 7$$

$$\pi + \sqrt{2} =$$

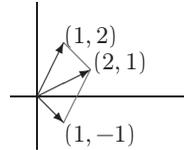
$$(4, 2)$$

\mathbb{R}

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(1, 2) + (1, -1) = (2, 1)$$



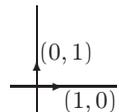
\mathbb{R}^2 est un espace vectoriel $\overset{\text{DESCARTES}}{\sim}$ plan

Multiplication externe : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(\alpha, (x, y)) \longmapsto (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)$$

$$(7, -5) = 7 \cdot (1, 0) - 5 \cdot (0, 1)$$

$$(0, 0) = (7, -5) + (-7, 5)$$



$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

Commentaire personnel

Dimension de \mathbb{C}^3 sur \mathbb{C} ? Sur \mathbb{R} ?

\mathbb{R}^6 sur \mathbb{C} ?

Un **espace vectoriel** (ev) V sur un corps $(K, +, \cdot)$ est un ensemble muni de deux lois partout définies, l'une interne $+$ et l'autre externe \cdot , tel que :

$(V, +)$ est un groupe commutatif de neutre noté 0
 $\cdot : K \times V \rightarrow V$ est telle que :

- . est exoassociative : $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V : (\alpha.\beta).x = \alpha.(.\beta.x)$
- l'unité 1 de K est neutre à gauche : $\forall x \in V : 1.x = x$
- . est distributive à gauche sur + de V :
 $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in V : \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$
- . est exodistributive à droite sur + de K :
 $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V : (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

Produit scalaire de vecteur de V (par ex. \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}) :

Première définition : $\vec{v} \bullet \vec{w} = \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
 $((x_i), (y_i)) \mapsto \sum_i x_i \cdot y_i$

$(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$

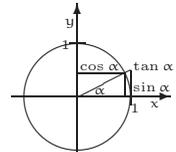
$(2, 4) \bullet (5, 3) = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 22$

Deuxième définition, définition axiomatique :

Produit scalaire (réel) :

$$\begin{cases} v \neq 0 \implies \langle v | v \rangle > 0 \\ \langle v | w \rangle = \langle w | v \rangle \\ \langle v | \alpha.w + \beta.w' \rangle = \alpha \cdot \langle v | w \rangle + \beta \cdot \langle v | w' \rangle \end{cases}$$

$\iff \langle v | w \rangle = \sum_i v_i \cdot w_i$



Troisième définition :

$\vec{v} \bullet \vec{w} = v \cdot w \cdot \cos \alpha$

$v = \|\vec{v}\|$

Exercices : Démontrer l'équivalence entre ces trois définitions dans \mathbb{R}^2

Commentaire personnel

Définition équivalentes de **produit scalaire** dans \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}_*$) :

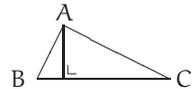
1. $\langle x | y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$

2. $\langle | \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} x \neq 0 \implies \langle x | x \rangle > 0 \\ \langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle \\ \langle \alpha.x + \beta.y | z \rangle = \alpha \cdot \langle x | z \rangle + \beta \cdot \langle y | z \rangle \end{cases}$$

3. $\langle x | y \rangle := \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \alpha$

Norme induite : $\|x\| := \sqrt{\langle x | x \rangle}$



PYTHAGORE généralisé : $\|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 + 2 \cdot \vec{AC} \cdot \vec{CB}$

Démonstration

1 \implies 2) $x \neq 0 \implies \langle x | x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$

$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle y | x \rangle$

$\langle \alpha.x + \beta.y | z \rangle = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) z_i = \alpha \sum_{i=1}^n x_i z_i + \beta \sum_{i=1}^n y_i z_i$
 $= \alpha \cdot \langle x | z \rangle + \beta \cdot \langle y | z \rangle$

$$2 \Rightarrow 1) (e_i)_i \text{ base orthonormée (telle que } \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} \text{)} \left| \begin{array}{l} x =: \sum_{i=1}^n x_i e_i \\ y =: \sum_{i=1}^n y_i e_i \end{array} \right.$$

$$\langle x | y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i | \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i | \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle e_i | e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_i \quad \square$$

23 Samedi 19 mai 2007 : Préparation pour Sienne

...

24 Samedi 26 mai 2007 : Préparation pour Sienne

ARISTOTE : l'idée qu'il existe un monde physique primitif
(~ préexistence d'un monde physique).

~La science fondamentale c'est la physique.

On croit à l'existence d'un substrat.

Mène au physicalisme. (\rightarrow matérialisme éliminativiste)

PLATON : le platonisme couvre -500 à $+500$

Novσ⁶

mathématicalisme



auto-observation

La physique *émerge* des mathématiques.

----- Commentaire personnel -----

La physique : le *monde* physique ou la *théorie* physique ?

Peut-on dupliquer un "objet" inerte ?

Vérité

intelligible

âme plénière

6. Le sigma final devrait être \varsigma.

Les machines löbiennes sont les machines qui peuvent prouver leur propre théorème de GÖDEL.

Hiérarchie présumée de “puissance” :

- ZF : axiomatique de ZERMELO-FRAENKEL
- être humain ?
- PA : PEANO Arithmetic
- LRA : Little ROBINSON Arithmetic

25 Samedi 2 juin 2007 : Second théorème de GÖDEL et hypostases

Roberto MAGARI : logique modale algébrique (algèbre diagonalisable)

Self Reference at Modal Logic (SMORYŃSKI)

Le premier théorème d’incomplétude de GÖDEL :

il existe une proposition vraie que la théorie ne peut démontrer.

(ROSSER \rightarrow indécidable)

Le second théorème d’incomplétude de GÖDEL : $(M \not\vdash \perp) \implies M \not\vdash (\ulcorner M \not\vdash \perp \urcorner)$

Si la machine M est consistante alors M ne peut prouver sa consistance. auto-référence

Prédicat arithmétique de prouvabilité (*beweisbar* : prouvable) :

$Bew(x) := \exists y Bew'(x, y)$ (y “code” une preuve de x)

$Bew'(x, y)$ est récursif

C’est décidable.

$\exists y Bew'(x, y)$ est semi-décidable (s’il existe elle finit par le trouver)

$M \vdash p$

$Bew(\ulcorner p \urcorner)$ (relatif à M)

Commentaire personnel

{formule logique} \rightarrow {nombre de GÖDEL} \rightarrow { \perp , \top }

Second théorème d’incomplétude de GÖDEL :

$\neg Bew(\ulcorner \perp \urcorner) \rightarrow \neg Bew(\ulcorner \neg Bew(\ulcorner \perp \urcorner) \urcorner)$

Mais la machine sait le prouver : $M \vdash \neg Bew(\ulcorner \perp \urcorner) \rightarrow \neg Bew(\ulcorner \neg Bew(\ulcorner \perp \urcorner) \urcorner)$

$M \vdash \neg Bew(\ulcorner \neg p \urcorner) \rightarrow \neg Bew(\ulcorner \neg Bew(\ulcorner \neg p \urcorner) \urcorner)$

La machine ne sait jamais pas prouver les formules $\neg Bew(\ulcorner \dots \urcorner)$

$\neg \Box \neg p \rightarrow \neg \Box \neg \Box \neg p$

$\Diamond p \rightarrow \begin{cases} \Diamond \Box \neg p \\ \neg \Box \Diamond p \end{cases}$

\Box : prouvabilité (notion de nécessité)

\Diamond : consistance (notion de possibilité)

$\Diamond \top \longrightarrow \neg \Box \Diamond \top$

$\Box \Diamond \top \longrightarrow \neg \Diamond \top$

$\Box \Diamond \top \longrightarrow \Box \perp$

Il n'y a que les fous qui savent (se) prouver qu'ils sont sain d'esprit.

$(p \rightarrow q) \longleftrightarrow (\neg p \vee q)$

$\neg \Box \perp$

$\Box \perp \longrightarrow \perp$

$\Box(\Box \perp \rightarrow \perp) \longrightarrow \Box \perp$

cas particulier de la formule de LÖB : $\Box(\Box p \rightarrow p) \longrightarrow \Box p$

Machine correcte : $\Box p \longrightarrow p$ (\implies consistance)

Est-ce que c'est prouvable ? C.-à-d. $\Box(\Box p \rightarrow p)$?

Faux en général.

$(\Box p \wedge p) \longrightarrow p$

$(\Box p \wedge p) \longleftrightarrow \Box p$

mais $M \not\vdash (\Box p \wedge p) \longleftrightarrow \Box p$

On suppose par défaut que la machine est correcte et honnête

(donc sous-entendu p est vrai)

p vérité

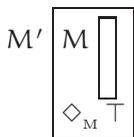
$\Box p$ prouvabilité

$\Box p \wedge p$

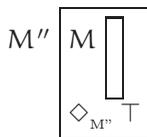
Excursus : $M \begin{array}{|c|} \hline PA \\ \hline \Diamond_{PA} \top \\ \hline \end{array} \iff (\Box p \rightarrow p)$

M est consistante : $\Diamond_M \top$

mais $\neg \Box \Diamond_M \top$



M est consistante
 $\implies M'$ est consistante
et plus efficace



M'' est inconsistante

(on peut le faire par diag.)

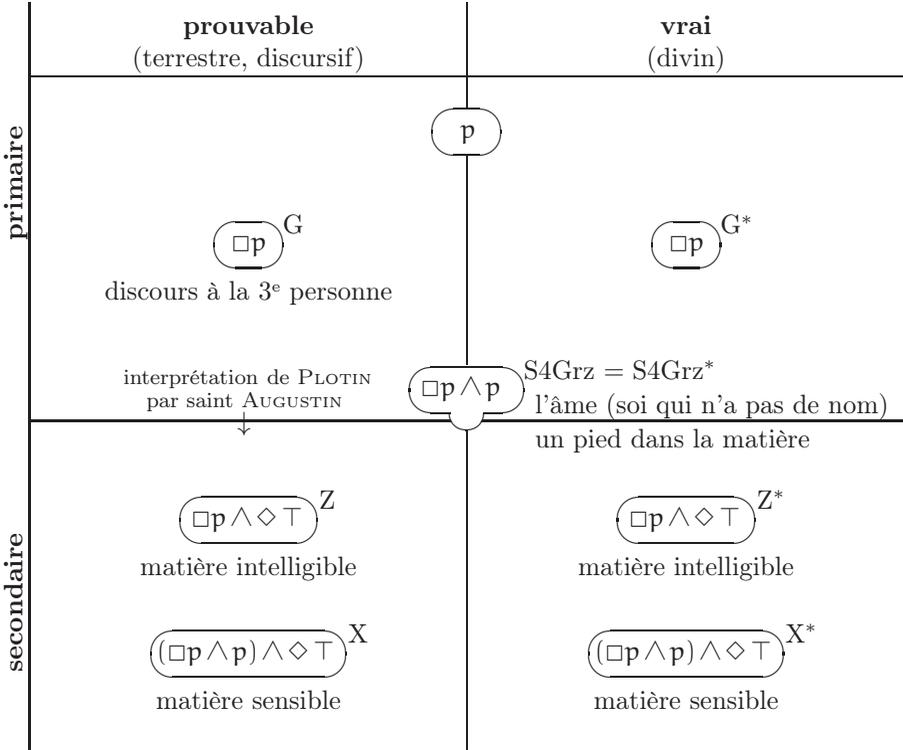
$M \vdash \Box(p \leftrightarrow \Diamond p) \longleftrightarrow \Box(p \leftrightarrow \perp)$

$\frac{\vdots}{p} \longrightarrow \Box p$

Règle de LÖB : $\frac{\vdots}{\Box p} \longrightarrow p$

L'incomplétude force les nuances suivantes :

p	vérité	
$\Box p$	prouvabilité	
$\Box p := \Box p \wedge p$	connaissabilité	
$\Diamond p := \Box p \wedge \Diamond p$	observabilité	(modèle de KRIPKE) $\Box p \wedge \Diamond \top$
$\Box p := (\Box p \wedge p) \wedge \Diamond p$	sensibilité	(modèle de KRIPKE) $(\Box p \wedge p) \wedge \Diamond \top$



p et $\Box p \wedge p$ ne sont pas définissables par la machine.

On sait définir les hypostases 2 à 8 dans G.

S4Grz : logique temporelle, intuitionniste.

Âme : petit barbare.

Pour EVERETT la matière apparaît à droite.

L'interprétation d'EVERETT de la mécanique quantique apparaît dans Z*.

$p \rightarrow \Box p$

La Σ_1 -vérité ($\exists x P(x)$) est définissable par la machine.

consistance : $\diamond T$
 $\iff T \rightarrow \diamond T$
 $\iff \Box \perp \rightarrow \perp$

inconsistance : $\Box \perp$
 $\iff \perp \rightarrow \Box \perp$
 $\iff \diamond T \rightarrow T$

correction : $\forall p : \Box p \rightarrow p$
 $\xrightarrow{\text{contraposition}} p \rightarrow \diamond p$
 $\xrightarrow{\text{MP}} \diamond T$

26 Samedi 9 juin 2007 : Siena's Slides

*A Purely Arithmetical, yet Empirically Falsifiable,
 Interpretation of PLOTINUS' Theory of Matter*

Siena

ARISTOTE : R = WYS (reality is what you see)

PLATO : WYS = could be shadow of deeper R ?

Deeper R ? 

Modernity, news :
 2 creative bombs

- Universal Machine
 (toutes les UM classiques savent se simuler les unes les autres en temps polynômial)
- the other UM : (quantic computer)

bit

$\uparrow \downarrow \downarrow^*$

qubit

(On peut expliquer le bit à partir du qubit.

Le travail de Bruno MARCHAL tend à expliquer le qubit à partir du bit.)

Commentaire personnel

Une boule roule *sur* le sol, bute *contre* un mur.

Où est l'«esprit» qui *porte* la boule, qui l'arrête *contre* le mur ?

quanta :

qualia : qualité sensible (quanta incommunicable) (car relative au sujet ?)

GOETHE >< NEWTON : théorie de la lumière

Emil POST : 1921

GÖDEL LÖB SOLOVAY

(MAGARI (un des découvreurs de G), KUZNETSOV)

$\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$

\Rightarrow 

$UM \not\vdash (\Box p \wedge p) \leftrightarrow \Box p$

$(\Box p \wedge \Diamond p) \leftrightarrow \Box p$

$(\Box p \wedge \Diamond p \wedge p) \leftrightarrow p$

...

*The Undecidable*⁷ (Martin DAVIS/ Dover) : articles originaux de GÖDEL, CHURCH, TURING, ROSSER, KLEENE, POST.

GÖDEL : consistance \Rightarrow il existe une proposition non prouvable

ROSSER : omega consistance \Rightarrow il existe une proposition non prouvable et dont la négation est aussi non prouvable

Note de bas de page de POST : anticipe ... et son erreur...

$M \vdash A$: la machine M prouve le théorème A

" $M \vdash 1 + 1 = 2$ "

Il existe un prédicat de l'arithmétique du premier ordre de la prouvabilité.

$B(1 + 1 = 2)$ (B est relatif à la machine M)

$\frac{M \vdash B(1 + 1 = 2)}{M \vdash 1 + 1 = 2}$ si M correcte $\frac{M \vdash Bp}{M \vdash p}$ machine stable

$\frac{M \vdash 1 + 1 = 2}{M \vdash B(1 + 1 = 2)}$ principe d'introspection (awareness)

PA
Bf

 reste consistant car $\left\{ \begin{array}{l} Bf \\ Bf \rightarrow f \\ \neg Bf \end{array} \right.$ contredit le théorème de GÖDEL

Bp est noté $\Box p$

7. <http://books.google.com/books?id=qW8x7sQ4JXgC>

$\neg \Box p$ je ne sais pas prouver p	$\Diamond \neg p$ la négation de p est consistante car sinon on aurait : $M + (\neg p) \vdash \perp$ $M \vdash (\neg p) \rightarrow \perp$ $M \vdash \neg \neg p$ $M \vdash p$ KO	\Box : nécessité (nature aléthique)
---	---	--

Second théorème d'incomplétude de GÖDEL :

$$\neg \Box \perp \rightarrow \neg \Box (\neg \Box \perp)$$

$$\Diamond \top \rightarrow \Diamond \Box \perp$$

$$\Box \perp \vee \Diamond \Box \perp$$

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

$$\neg \Diamond \Box \perp \rightarrow \neg \Diamond \top$$

$$\Box \Diamond \top \rightarrow \Box \perp$$

$$\Box (\Box \perp \rightarrow \perp) \rightarrow \Box \perp$$

$$(\Box \perp \rightarrow \perp) \leftrightarrow (\Diamond \top \vee \perp) \leftrightarrow \Diamond \top$$

27 Samedi 16 juin 2007 : Siena's Slides 2

p
 $\Box p$
 $\Box p \wedge p$
 $\Box^\alpha p \wedge \Diamond^\beta p$
 $\Box^\alpha p \wedge \Diamond^\beta p \wedge p$

(Ce sont les mêmes propositions de l'arithmétique
mais du point de vue de la machine elles sont différentes.)

TRUTH
prouvability
knowability
observability
sensitivity

ONE
INTELLECT
SOUL
INTELLIGIBLE MATTER
SENSITIVE MATTER

$$\alpha < \beta < \omega_1^{CK}$$

(Les 8 hypostases...)



MECANISM : $G + p \rightarrow \Box p$
= G1 (Σ_1)

CONSCIENCE :

...

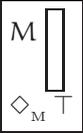
conscience en anglais : sens moral
 consciousness, awareness : "connaissance"

La connaissance (SOUL) obéit à une logique non-gödelienne :

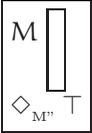
$$\begin{aligned} \Box p &:= \Box p \wedge p \\ \Diamond p &= p \vee \Diamond p \\ \Diamond \top &= \top \vee \Diamond \top \end{aligned}$$

$$\cancel{\Box \neg \Box} \quad \neg(\Box = \Diamond)$$

Si la machine infère $\Diamond \top : M'$



M est consistante
 $\Rightarrow M'$ est consistante
 et plus efficace



M'' est inconsistante

(on peut le faire par diag.)

BENACERRAF sent qu'on peut corriger LUCAS (erreur que PENROSE va refaire).

*Is Mathematical Insight Algorithmic ?*⁸ (Martin DAVIS, 22 mars 1995)

*How Subtle is Gödel's Theorem More on Roger Penrose*⁹ (Martin DAVIS) :

"GÖDEL understood very well, what PENROSE seems to have missed, that a Platonist position concerning mathematical entities is perfectly consistent with a mechanist view of mind.

[...]

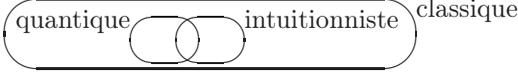
To repeat what I said in my first commentary on PENROSE (DAVIS 1990): the question of whether mathematical insight is the product of an algorithmic process is an important and difficult question. But GÖDEL's theorem has nothing to say about it."

Th. de GÖDEL : si on est une machine saine
 alors on ne sait pas quelle machine on est.

- ⋮
- 2ω
- ⋮
- ω bien fondé car il y a un plus petit élément dans chaque sous-ensemble
- ⋮
- 0

8. <http://www.cs.nyu.edu/cs/faculty/davism/penrose.ps>
 9. <http://www.cs.nyu.edu/cs/faculty/davism/penrose2.ps>

VON NEUMANN et BIRKHOFF : logique quantique (il n'y a pas d'implication)



Logique B : $\left\{ \begin{array}{l} K \quad \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B) \\ T \quad \Box A \rightarrow A \\ B \quad A \rightarrow \Box \Diamond A \\ \text{avec MP et NEC} \end{array} \right.$ (FEYS-VON WRIGHT)

GOLDBLATT : $MQL \vdash A \iff B \vdash \Box \Diamond A$

ARTEMOV : $\Box p \wedge p$

Logique B^- : $\left\{ \begin{array}{l} K \\ T \\ p \rightarrow \Box \Diamond p \\ \Box A \rightarrow \Box \Diamond \Box A \\ \text{avec MP (sans NEC)} \end{array} \right.$

Σ_1 : $\exists x A(x)$ avec A récursif

Π_1 : $\forall x A(x)$

Commentaire personnel

La cohérence est une **propriété récessive** : \forall

La démontrabilité est une **propriété expansive** : \exists

« Le récessif c'est l'ordinateur qui mouline, c'est la non-contradiction (attendre le bus).

L'expansif c'est la démonstration, c'est le contre-exemple (dire zut). »

(Jean-Yves GIRARD)

28 Samedi 30 juin 2007 : Commentaires Sienne ; Combinateurs

*The Undecidable*¹⁰ (Martin DAVIS)

Commentaire personnel

Point fixe de DESCARTES \implies vérités relatives à ce point fixe

La science c'est des certitudes locales, relativement, relationnellement à ...

Liesbeth DE MOL

...

10. <http://books.google.com/books?id=qW8x7sQ4JXgC>

Combinateurs de CURRY-SCHÖNFINKEL

Le langage n'est constitué que des quatres symboles $K, S, ($ et $)$

K est un combinateur

S est un combinateur

Si x et y sont des combinateurs alors $(x y)$ est un combinateur

On abrégie $((x y) z)$ en xyz .

(x, y, z, \dots) sont des métavariabes)

En général $xyz \neq x(yz)$

Axiomes : $Kxy = x$
 $Sxyz = xz(yz)$

On peut évaluer dans n'importe quel ordre...

Donc $SKSK = KK(SK) = K$

Cherchons I tel que $Ix = x$.

$\forall y : SKyx = Kxyx = x$

Existe-t-il d'autres solutions stables ?

$I := SKK$

Cherchons B tel que $Bxyz = x(yz)$.

$B := S(KS)K$ car $S(KS)Kxyz = KSx(Kx)yz = S(Kx)yz = Kxz(yz) = x(yz)$

Commentaire personnel

(Calculabilité) Turing Universel

~ combinateurs ~ logique sans sémantique (démontrabilité ?)

29 Samedi 7 juillet 2007 : Futurs articles ; Combinateurs

Futurs articles qu'il compte écrire :

1. *Olympia's revenge. A rejoinder to MAUDLIN & BARNES* (Journal of Philosophy) : sur le graphe filmé.
On ne peut pas assimiler la conscience à l'activité physique de la machine sur laquelle tourne...
2. *The Universal Dovetailer Argument.*
3. *The Testable (Plotinian) Theology of the Universal Machine* : sur les hypostases de PLOTIN et peut-être la thèse de CHURCH.
4. *Footnote 118* : sur la thèse de CHURCH.

Combinateurs

$Bxyz = x(yz)$

Avec des "fonctions" : $BFGx = F(Gx)$ " = " $(F \circ G)(x)$

BFG " = " $F \circ G$

$$BTW = S(KT)W$$

$$\lambda x \lambda y (x + y)4 \longrightarrow \lambda y (4 + y)$$

$$SKKS = KS(KS) = S$$

Cherchons :

I tel que $Ix = x$

M tel que $Mx = xx$

B tel que $Bxyz = x(yz)$

W tel que $Wxy = xyy$ grand duplicateur (Warbler/ fauvette, pouillot)

L tel que $Lxy = x(yy)$ (Lark/ alouette)

C tel que $Cxyz = xzy$ grand permutateur (Cardinal)

...

I tel que $Ix = x$?

$Kxy = x$

$Kx(\dots)$

$Kx(\dots x) \longleftarrow SK(\dots)x$

Par exemple : $Kx(Kx) = SKKx$ ou $Kx(Sx) = SKSx$

$I := SKK$

M tel que $Mx = xx$?

$M := SII = S(SKK)(SKK)$

$MM = MM$

infinity = $\Omega := MM = SII(SII) = S(SKK)(SKK) [S(SKK)(SKK)]$

Dans [Theoretical computer science] :

- leçon de NEWTON : tout est réversible dans la nature
 \implies pas d'éliminateur
- leçon de EPR-BELL-WATTERS-ZURECH : no cloning theorem
 \implies pas de duplicateur

Donc pour les physiciens, il n'y a ni Kestrel, ni Starling

(logique de la relevance : on doit compter l'utilisation des éléments)

Si on garde S : "base" sans K : BCIW ou BCIM

BCI-algèbre : calcul lambda linéaire

$K_i AB \text{ "}\longrightarrow\text{" } A$ éliminateur local $\{A, B, C, \dots\}$

Commentaire personnel

Tiré du forum [CandiULB] : *To Mock a Mockingbird* (Raymond SMULLYAN) : On est dans une forêt enchantée habitée par de curieux oiseaux. (a b) représente la réponse de l'oiseau a lorsqu'on lui présente l'oiseau b.

$\forall a, b, \exists c, \forall x : cx = a(bx)$ on dit que l'oiseau c **compose** a et b

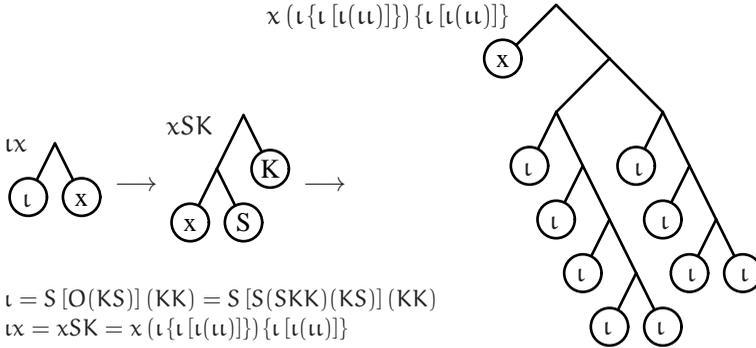
L'oiseau moqueur M est tel que $\forall x : Mx = xx$

On dit que l'oiseau a est **épris** de l'oiseau b lorsque $ab = b$.

$\forall a, \exists b : ab = b$ car $\exists c : cx = a(Mx)$ et donc $cc = a(Mc) = a(cc)$

$BaM(BaM) = a [M(BaM)] = a [BaM(BaM)]$
 $= La(La) = a [La(La)]$
 $= SLLa = a(SLLa)$
 $= BMLa = M(La)$
 $BML = S(KM)L$

Bases : {K, S} ou {B, C, K, W} ou {t} ou ...



$t = S [O(KS)] (KK) = S [S(SKK)(KS)] (KK)$
 $tx = xSK = x \{t \{t(u)\}\} \{t \{t(u)\}\}$
 $tu = tSK = SSKK = SK(KK) = I_{KK}$
 $t(t) = tI_{KK} = I_{KK}SK = SK$
 $t \{t(u)\} = t(SK) = SKSK = KK(SK) = K$
 $t \{t \{t(u)\}\} = tK = KSK = S$

$WK = SKI = I_t$
 $WKK = SKIK = KK(IK) = KKK = K$
 $WKS = SKIS = KS(IS) = KSS = S$
 $WS = SSI$
 $WSK = SSIK = SK(IK) = SKK = I$
 $WSS = SSIS = SS(IS) = SSS$
 $Yx = x(Yx) = x[x(Yx)] = \dots$
 $YI = I(YI) = YI = \dots$

$TK \left| \begin{matrix} I \\ S \end{matrix} \right| xy = \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \quad \text{if } (I|S) \text{ then } x \text{ else } y$

$K \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right| xy = \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$
 $\perp \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right| xy = \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$
 $K \perp xyz = \perp yz = z$
 $\perp Kx = x$

$\text{not } K = K \perp K = \perp$
 $\text{not } \perp = \perp(\perp I)K = IK = K$
 $\text{not } B = B(BI)K = S [K(BI)] K$
 $\quad \text{not } Bx = S [K(BI)] Kx = K(BI)x(Kx)$
 $\quad \text{not } Bxy = K(BI)x(Kx)y = BI(Kx)y = I(Kxy) = Kxy = x$
 $\text{not } C = C(CI)K = S(CI)(KK)$

$\text{not } Cx = S(CI)(KK)x = CIx(KKx) = CIxK = IKx = Kx$
 $\text{not } I = I(II)K = IIK = IK = K$
 $\text{not } L = L(LI)K = LI(KK) = I[KK(KK)] = KK(KK) = K$
 $\text{not not} = \text{not}(\text{not } I)K = \text{not } KK = K \perp KK = \perp K = I$
 $\text{not } O = O(OI)K = K(OIK) = K[K(IK)] = K(KK)$
 $\text{not } R = R(RI)K = BBT(RI)K = B[T(RI)]K$
 $\text{not } Rx = R(RI)Kx = Kx(RI) = x = Ix$
 $\text{not } S = SOK$
 $\text{not } Sx = SOKx = Ox(Kx) = Kx[x(Kx)] = x = Ix$
 $\text{not } T = T(TI)K = K(TI)$
 $\text{not } Tx = K(TI)x = TI$
 $\text{not } Txy = TIy = yI$
 $\text{not } V = V(VI)K = BCT(VI)K = C[T(VI)]K$
 $\text{not } Vx = V(VI)Kx = x(VI)K$
 $\text{not } Vxy = x(VI)Ky$
 $\text{not } Vxyz = x(VI)Kyz = x(VI)y$
 $\text{not } W = W(WI)K = WIKK = IKKK = KKK = K$
 $\text{not } Y = ?$

$\neg K = K \perp K = \perp$
 $\neg \perp = \perp \perp K = K$
 $\neg \neg = \neg \perp K = \perp \perp K = K$
 $\neg Y = Y \perp K = \perp(Y \perp)K = K$

$K \perp xyz = z = Iz$
 $K \perp x = \perp$
 $K \perp xy = \perp y = I$
 $SKxy = Ky(xy) = y = Iy = \perp xy$
 $CKxy = Kyx = y = Iy = \perp xy$

Nombres naturels de BARENDREGT :

$0 := I$

$1 = V \perp I = S(T \perp) \perp$

$2 = V \perp 1 = S(T \perp) \{K[S(T \perp) \perp]\}$

$\text{zero?}(\text{succ } x) = TK(V \perp x) = V \perp xK = K \perp x = \perp$

$\text{prev}(\text{succ } x) = T \perp(V \perp x) = V \perp x \perp = \perp \perp x = x$

$\text{succ}(\text{prev } x) = V \perp(T \perp x) = S(T \perp) [K(T \perp x)] = S(T \perp) [K(x \perp)]$

$\text{prev } 0 = 0 \perp = I \perp = \perp$

$\text{prev } \perp = \perp \perp = I = 0$

$\forall k \in \mathbb{N} : \text{prev}^k 0 = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ \perp & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$

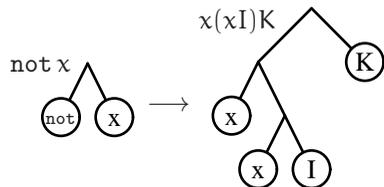
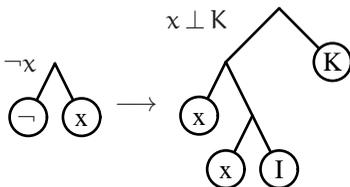
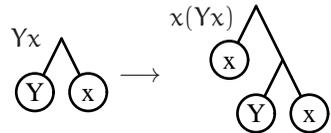
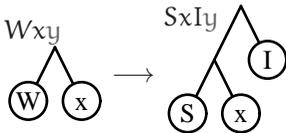
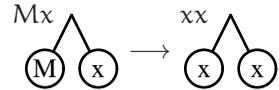
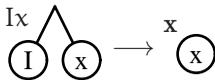
$\text{zero? } \perp = \perp K = I = 0$

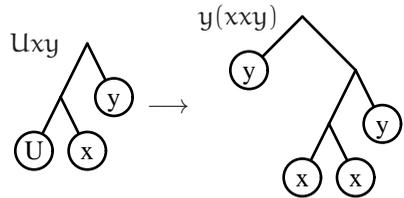
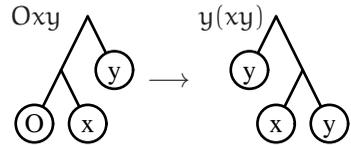
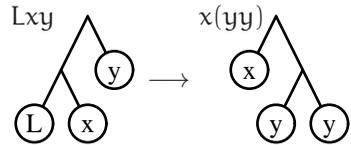
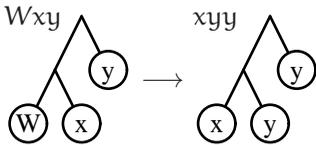
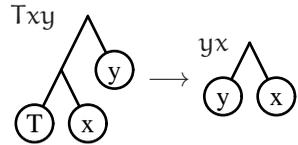
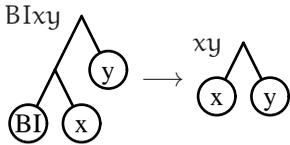
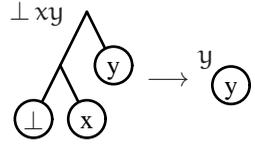
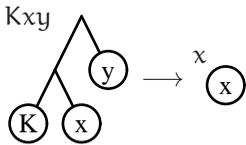
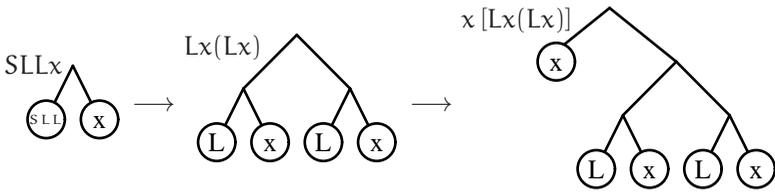
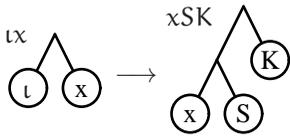
$\text{succ } \perp = S(T \perp)(K \perp)$

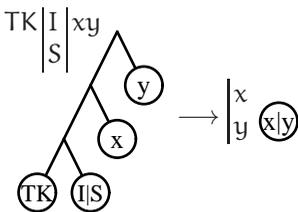
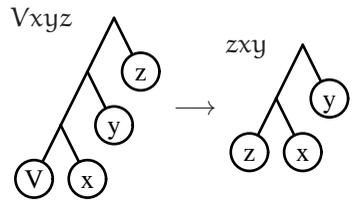
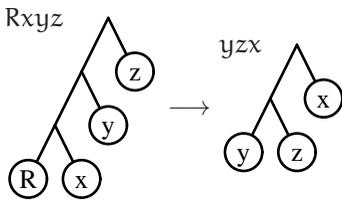
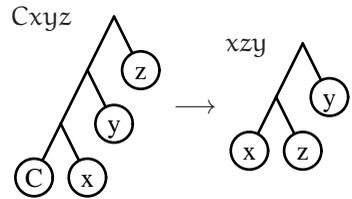
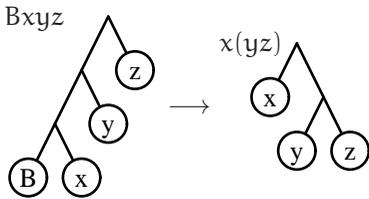
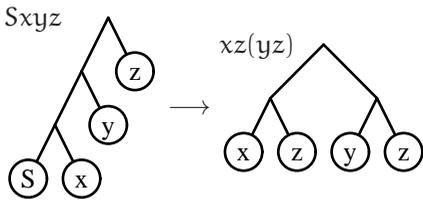
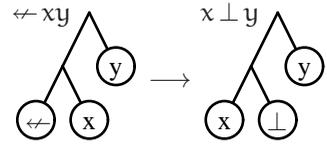
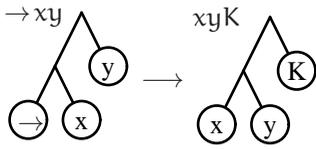
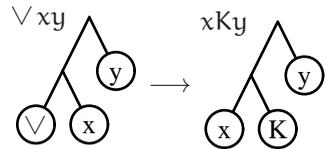
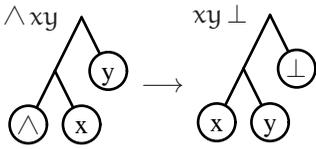
$\text{succ } xy = V \perp xy = y \perp x$

$Kxy = x$	$K = \iota(SK) = \iota[\iota(\iota)]$	Kestrel, vrai, grand éliminateur
$Sxyz = xz(yz)$	$S = B(BW)(BBC)$ $= \iota K = \iota\{\iota[\iota(\iota)]\}$	Starling
$Bxyz = x(yz)$ $Bx = S(Kx)$	$B := S(KS)K$	Bluebird, mul de C., grand compositeur
$Cxyz = xzy$ $Cx = B(Sx)K$ $= S[K(Sx)]K$ $Cxy = Sx(Ky)$	$C := S(BBS)(KK)$ $= S[S(KB)S](KK)$	Cardinal, grand permutateur
$I_x y = y$	$I_x := SKx$	identité
$I_x = x$	$I := I_K = SKK = WSK$	identité, naturel 0 B.
$\iota x = xSK$ $\iota x = x$	$\iota := S[O(KS)](KK)$ $\iota = I_{KK} = SK(KK)$ $\iota(\iota) = SK$	iota de Chris BARKER (permet à lui seul de définir K et S)
$Lxy = x(yy)$ $Lx = BxM$	$L := CBM = SB(KM)$	Lark
$Mx = xx$	$M := SII = OI = WI$	Mockingbird, duplicateur
$Oxy = y(xy)$	$O := SI$	Owl
$\Omega x = \Omega x$	$\Omega := MM = IM(IM)$	infini (non stable)
$Rxyz = yzx$ $Rx = B(Tx)$	$R := BBT = S(KB)T$	Robin (rotation gauche)
$Txy = yx$ $Tx = O(Kx)$	$T := BOK = CI = S(KO)K$	
$Uxy = y(xxy)$ $Ux = O(xx)$	$U := LO = BOM$	TURING bird
$Vxyz = zxy$ $Vx = C(Tx)$ $Vxy = S(Tx)(Ky)$	$V := BCT = S(KC)T$	Vireo (rotation droite)
$Wxy = xyy$ $Wx = SxI$	$W := SS \perp$	Warbler, grand duplicateur
$Yx = x(Yx)$ $Y'x = x(Y'x)$	$Y := S(KM)[SB(KM)]$ $Y' := SSK[S(K\{SS[S(SSK)])\}]K$	paradoxal

$\top xy = x$	$\top := K$	vrai
$\perp xy = y$ $\perp x = I$	$\perp := KI$	faux, naturel 0 de CHURCH
$\neg x = x \perp K$	$\neg := V \perp K = C(T \perp)K$ $= S[O(K \perp)](KK)$	négation booléenne
$\text{not } x = x(xI)K$	$\text{not} := C[O(TI)]K$ $= S[O(O \perp)](KK)$	“ma” négation booléenne
$\wedge xy = xy \perp$	$\wedge := R \perp = S\{K[O(K \perp)]\}$	conjonction booléenne
$\vee xy = xKy$ $\vee x = xK$	$\vee := TK = O(KK)$	disjonction booléenne
$\rightarrow xy = xyK$	$\rightarrow := RK = S\{K[O(KK)]\}$	implication booléenne
$\leftrightarrow xy = x \perp y$ $\leftrightarrow x = x \perp$	$\leftrightarrow := T \perp = O(K \perp)$	négation de l’impli- cation réciproque
$0x = x$	$0 := I = SKK$	0 de BARENDREGT
$\text{succ } x$ $= S(T \perp)(Kx)$	$\text{succ} := V \perp = C(T \perp)$	successeur de B.
$\text{prev } x = x \perp$	$\text{prev} := T \perp = O(K \perp)$	prédécesseur de B.
$\text{zero? } x = xK$	$\text{zero?} := TK = O(KK)$	prédicat = 0 de B.
$0x = I$	$0 := KI = \perp$	0 de CHURCH
$\text{succ } x = SBx$	$\text{succ} := SB = S[S(KS)K]$	successeur de C.
$\text{add } xy = S(BBx)y$ $\text{add } x = S(BBx)$	$\text{add} := BS(BB)$ $= S(KS)[S(KB)]$	addition de C.
$\text{mul } xy = S(Kx)y$ $\text{mul } x = S(Kx)$	$\text{mul} := B$	multiplication de C.
xy		x^y (pour x et y naturels de C.)







30 Samedi 14 juillet 2007 : [Statuts ;] Combinateurs

BCI-algèbre : pas d'éliminateur, ni de duplicateur
(composeur, permutateur, identité)

Calcul lambda planaire

ABRAMSKY

$I := SKK$	$Ix = x$
$M := SII = S(SKK)(SKK)$	$Mx = xx$
$\Omega := MM = SIIM = IM(IM) = MM$	
$B := S(KS)K$	$Bxyz = x(yz)$

Exercice de SMULLYAN : dans toute forêt avec B et M, chaque combinateur à un point fixe.

Cherchons C tel que $Cxyz = xzy$

Méthode de Michel BOELEN :

- Utiliser S
- Éliminer les ()
- Décomposition
- Intercalaire : $Ax \underbrace{B}_{KBx}$

$$SA(KB)x = Ax(KBx)$$

$$\begin{aligned} xzy &= xz(Kyz) = Sx(Ky)z = B(Sx)Kyz \\ &= BBSxKyz \\ &= \underbrace{BBS}_A x \underbrace{(KKx)}_{KBx} yz = S(BBS)(KK)xyz \end{aligned}$$

Ce qui nous donne $C = S(BBS)(KK)$

Colle : évaluer $KS\Omega$

Si on ne se pose pas de question $KS\Omega = S$

Mais si on voulait d'abord développer Ω :

$$KS\Omega = KS(MM) = KS(SIIM) = KS[IM(IM)] = KS(MM) = \dots$$

Commentaire personnel

$KS\Omega$ admet une forme normale alors que sa partie Ω n'en n'admet pas!

30.1 Lambda-calcul

Un λ -terme est soit :

une λ -variable : x, y, z, \dots

une λ -abstraction :

si x est une λ -variable et u un λ -terme alors $\lambda x.u$ est un λ -terme

une λ -application : si u et v sont des λ -termes alors uv est un λ -terme

31 Samedi 28 juillet 2007 : [Lettre ;] Combinateurs

Algèbre applicative ?

Propriété de CHURCH–ROSSER : chaque “ordre d’évaluation qui termine” aboutit à la même forme normale.

Un combinateur possède une forme normale ssi “l’ordre d’évaluation en commençant par la gauche termine”.

32 Samedi 18 août 2007 : Diagonalisation

...

33 Samedi 1^{er} septembre 2007 : Computationalisme ; Ordinaux transfinis

...

34 Samedi 8 septembre 2007 : Histoire ; Bijection

...

35 Samedi 15 septembre 2007 : Diagonalisation

[Absent]

36 Samedi 22 septembre 2007 : Calculabilité – Prouvabilité

...

chutier

“La matière était déjà là, pensons-nous, bien avant l’esprit, et il est difficile de croire qu’elle n’est que le produit d’une activité mentale. Mais vrai ou faux, ce n’est pas pour cause d’absurdité patente qu’on peut refuser l’idéalisme.”

(*Problèmes de philosophie*/ Bertrand RUSSELL, 1912)

“WHITEHEAD m’a convaincu que la notion de matière est une fiction logique, c’est-à-dire quelque chose dont on peut se dispenser : un fragment de matière peut être traité comme un système d’événements liés situés dans différentes parties du continuum spatio-temporel.

[...]

Dans *Problèmes de philosophie*, j’ai fait l’hypothèse de l’existence du sujet, et j’ai traité l’expérience directe comme une relation entre le sujet et l’objet. À présent je fais du sujet une construction logique. En conséquence, il faut abandonner la distinction entre sensation et sense-data ; je rejoins à présent sur ce point William JAMES et l’école du réalisme américain. On trouvera dans mon ouvrage *L’Analyse de l’esprit* les changements qui en résultent dans la théorie de la connaissance.”

(*Introduction à la traduction allemande*/ Bertrand RUSSELL, 1924)

“Je suis prêt à parier qu’on s’apercevra un jour que la réalité matérielle se situe en fait à l’intérieur de la réalité mathématique.”

(Alain CONNES)

Théorie formelle...

- Une **proposition est démontrable** (ou prouvable) dans une théorie formelle si il existe une suite (finie ?) de propositions partant des axiomes de cette théorie et aboutissant à cette proposition.
- Une **proposition est réfutable** si son ajout à une théorie formelle consistante entraîne une contradiction.
- Une **proposition est décidable** si elle est démontrable ou réfutable.
- Une **théorie formelle est correcte** si toute proposition démontrable est vraie.
- Une **théorie formelle est consistante** si une proposition et sa négation ne peuvent être vraies ensembles.
- Une **théorie formelle est complète** si toute proposition vraie est démontrable.

La longue histoire de la matière (Jacques REISSE/ PUF)

Les postulats philosophiques du matérialisme historique (mémoire de Claude LÉVI-STRAUSS)

Les indispensables de la Mécanique quantique (Roland OMNÈS, Odile Jacob 2006)

Annexes

Liste des personnalités évoquées

- ~–580–~–500 : PYTHAGORE de Samos
~–428–~–347 : PLATON
~–385–~–322 : ARISTOTE
~ 205–~ 270 : PLOTIN
354–430 : saint AUGUSTIN
1564–1642 : Galileo Galilei, dit GALILÉE
1596–1650 : René DESCARTES
1629–1695 : Christiaan HUYGENS
1642–1727 : Isaac NEWTON
1646–1716 : Gottfried Wilhelm LEIBNIZ
1749–1832 : Johann Wolfgang von GOETHE
1773–1829 : Thomas YOUNG
1792–1871 : Charles BABBAGE
1815–1852 : Ada LOVELACE
1842–1891 : Édouard LUCAS
1845–1918 : Georg CANTOR
1854–1912 : Henri POINCARÉ
1858–1932 : Giuseppe PEANO
1858–1947 : Max PLANCK
1861–1947 : Alfred North WHITEHEAD
1871–1953 : Ernst ZERMELO
1872–1970 : Bertrand RUSSELL
1879–1955 : Albert EINSTEIN
1882–1970 : Max BORN
1884–1944 : George David BIRKHOFF
1885–1962 : Niels BOHR
1888–1971 : James Waddell ALEXANDER II
1889–1942 : Moses SCHÖNFINKEL
1889–1961 : Robert FEYS

1891 – 1965 : Abraham Adolf FRAENKEL
 1893 – 1971 : Kurt REIDEMEISTER
 1896 – 1966 : Boris PODOLSKI
 1897 – 1954 : Emil POST
 1900 – 1982 : Haskell Brooks CURRY
 1902 – 1983 : Alfred TARSKI
 1902 – 1984 : Paul DIRAC
 1903 – 1957 : John VON NEUMANN
 1903 – 1995 : Alonzo CHURCH
 1906 – 1978 : Kurt GÖDEL
 1907 – 1989 : John Barkley ROSSER
 1908 – : Claude LÉVI-STRAUSS
 1909 – 1994 : Stephen Cole KLEENE
 1909 – 1995 : Nathan ROSEN
 1911 – 1995 : Raphael M. ROBINSON
 1912 – 1954 : Alan Mathison TURING
 1916 – 2003 : Georg Henrik VON WRIGHT
 1919 – : Raymond SMULLYAN http://www.indiana.edu/~phil/Faculty/Individual_Pages/Smullyan.html
 1921 – 2006 : Martin Hugo LÖB
 1928 – : Martin DAVIS <http://www.cs.nyu.edu/cs/faculty/davism/>
 1930 – 1982 : Hugh EVERETT
 1931 – : Roger PENROSE
 1931 – : Roland OMNÈS
 1940 – : Saül Aaron KRIPKE
 1945 – : Louis H. KAUFFMAN <http://www2.math.uic.edu/~kauffman/>
 1947 – : Hendrik Pieter (Henk) BARENDREGT
 1947 – : Alain CONNES
 ~ 1951 – : Sergei N. ARTEMOV <http://web.cs.gc.cuny.edu/~sartemov/>
 1953 – : Samson ABRAMSKY
 1955 – : Bruno MARCHAL

 ? – : E. BARNES 1991
 ? – : Chris BARKER
 ? – : J. S. BELL 1964, 1987

?- : Paul BENACERRAF 1967
?- : James R. BROWN 1991
?- : Liesbeth DE MOL
?- : Robert GOLDBLATT 1974, 1978, 1993
?- : Andrzej GRZEGORCZYK 1950, 1964, 1967
?- : A. V. KUZNETSOV 1977
?- ? : Roberto MAGARI 1975
?- : Tim MAUDLIN 1989, 1994
?- : Jacques REISSE
?- : Craig SMORYŃSKI 1981, 1985
?- : Robert Martin SOLOVAY 1964, 1976
?- : WATTERS
?- : ZURECH

Références

- [CandiULB] BrunoMarchal,
[Cours de logique et informatique théorique 2005–...](#)¹¹
Forum CandiULB, 1^{er} octobre 2005–...23
- [Universalis] [Encyclopædia Universalis](#)¹² 10 PC/Mac, 2004. 2, 3
- [Pour la Science]
La science des nœuds.
[Pour la Science](#)¹³ HS15, avril 1997.
- [Point Aveugle] [Jean-Yves GIRARD](#)¹⁴,
Le Point Aveugle. Tome 1 : vers la perfection.
- [Secret amibe] Bruno MARCHAL,
*Le secret de l'amibe*¹⁵.
19 mai 2000. 8
- [Liens] Olivier PIRSON,
*Liens*¹⁶. 8
- [Kauffman] [Louis H. KAUFFMAN](#)¹⁷.
- [Larousse]
Petit Larousse illustré 1987.
Paris, Librairie Larousse, 1986. 7
- [Nombres 1] Olivier PIRSON,
Les Nombres : Science • Art • Théologie :
*1^{re} partie : Théologie grecque, Sommes et différences*¹⁸.
Notes à partir du séminaire 2006–2007 de Bruno MARCHAL. 1
- [Mathematics Genealogy] [The Mathematics Genealogy Project](#)¹⁹.
- [Theoretical computer science] Bruno MARCHAL,
*Theoretical computer science and the natural sciences*²⁰.
Physics of Life Reviews, Vol. 2 Issue 4 December 2005, pp. 251-289. 23
- [Wikipédia] [Wikipédia](#)²¹, l'encyclopédie libre.

11. <http://www.candiulb.be/forum/index.php?showtopic=23145>

12. <http://www.universalis.fr/>

13. <http://www.pourlascience.com/>

14. <http://iml.univ-mrs.fr/~girard/>

15. <http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/prixlemonde/SAPageWEBbest.pdf>

16. http://www.opimedia.be/Bruno_Marchal/index.htm#Liens

17. <http://www2.math.uic.edu/~kauffman/>

18. http://www.opimedia.be/Bruno_Marchal/index.htm#Nombres1

19. <http://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/>

20. <http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/publications.html>

21. <http://fr.wikipedia.org/>

Index

- , 5, 7, 16
- ⊗, 5, 7, 16
- ⊙, 7, 16
- ⊠, 7
- ◇, 7
- ◇, 7
- ◇, 7
- ◇, 7
- ◇, 7
- ◇, 7
- ||x||, 12
- Bew(x), 14
- application, 2
- bijection, 2
- combinateur, 22
 - ⊥, 27
 - ⊤, 27
 - (x y), 22
 - 0, 27
 - add, 27
 - C, 26
 - ∧, 27
 - ∨, 27
 - I, 26
 - I_x, 26
 - , 27
 - ι, 26
 - K, 22
 - L, 26
 - M, 26
 - mul, 27
 - ¬, 27
 - not, 27
 - ←, 27
 - O, 26
 - Ω, 26
 - prev, 27
 - puissance, 27
 - R, 26
 - S, 22
 - succ, 27
 - T, 26
 - U, 26
 - V, 26
 - W, 26
 - Y, 26
 - Y', 26
 - zero?, 27
 - épris, 23
 - naturel
 - de BARENDREGT, 25
 - de CHURCH, 27
 - consistance, 17
 - corps, 11
 - correction, 17
 - ensemble
 - dénombrable, 2
 - énumérable, 2
 - récuratif, 2
 - récurivement énumérable, 2
 - espace vectoriel, 11
 - fonction
 - calculable, 2
 - partielle, 2
 - totale, 2
 - groupe, 11
 - inconsistance, 17
 - λ-
 - λ-abstraction, 31
 - λ-application, 31
 - λ-terme, 31
 - λ-variable, 31

nœud, 8

norme induite, 12

produit scalaire, 12

propriété

expansive, 21

récessive, 21

théorème d'ALEXANDER, 10

Table des matières

À propos de ce document	1
1 25 novembre 2006 : Différences finies	1
2 2 décembre 2006 : Fonctions, diagonalisations	1
3 9 décembre 2006 : Théorème de CANTOR	1
4 16 décembre 2006 : Ordinaux transfinis	1
5 30 décembre 2006 : Identité de JACOBI	1
6 6 janvier 2007 : Théorème de JACOBI ; diagonalisations	1
7 20 janvier 2007 : Fonctions calculables	2
8 27 janvier 2007 : Ensembles récursifs	2
9 3 février 2007 : Plan et logiques	2
10 10 février 2007 : Les 8 hypostases	3
11 17 février 2007 : Information quantique	8
12 24 février 2007 : Théorie des nœuds	8
13 3 mars 2007 : Théorie des nœuds	9
14 10 mars 2007 : Polynôme A de KAUFFMAN	9
15 17 mars 2007 : Rappels sur les nœuds	9
16 24 mars 2007 : Synthèse pour la suite	9
17 31 mars 2007 : Invariant de KAUFFMAN	9
18 7 avril 2007 : Théorème d'ALEXANDER, tresses	10
19 14 avril 2007 : Groupe des tresses	10
20 21 avril 2007 : Liens avec la mécanique quantique	10
21 28 avril 2007 : Expériences quantiques des fentes	10

22	5 mai 2007 : Produit scalaire	10
	22.1 Produit scalaire de vecteurs	11
23	19 mai 2007 : Préparation pour Sienna	13
24	26 mai 2007 : Préparation pour Sienna	13
25	2 juin 2007 : Second théorème de GÖDEL et hypostases	14
26	9 juin 2007 : Siena's Slides	17
27	16 juin 2007 : Siena's Slides 2	19
28	30 juin 2007 : Commentaires Sienna; Combinateurs	21
29	7 juillet 2007 : Futurs articles; Combinateurs	22
30	14 juillet 2007 : [Statuts;] Combinateurs	30
	30.1 Lambda-calcul	31
31	28 juillet 2007 : [Lettre;] Combinateurs	31
32	18 août 2007 : Diagonalisation	31
33	1er septembre 2007 : Comp.; Ordinaux transfinis	31
34	8 septembre 2007 : Histoire; Bijection	31
35	15 septembre 2007 : Diagonalisation	31
36	22 septembre 2007 : Calculabilité – Prouvabilité	31
	chutier	32
	Annexes	33
	Liste des personnalités évoquées	33
	Références	36
	Index	37
	Table des matières	39

⊗TEX_{tes}

mis en page sous TEX
le 8 janvier 2012

<http://www.opimedia.be/DS/>