Les Nombres

Science • Art • Théologie

Séminaire donné par
Bruno Marchal[1]
2006 – 2007 (IRIDIA/ CEΨ[2])

“**Science**
Nous illustrerons l’infinie richesse des nombres et des relations qu’ils ont entre eux à travers une suite de théorèmes accompagnés de démonstrations et d’illustrations.

Art
Les multiples apparitions du nombre d’or et des nombres d’argent. Les suites musicales de Kindermann et autres quasi auto-similarités chaotiques numériques.

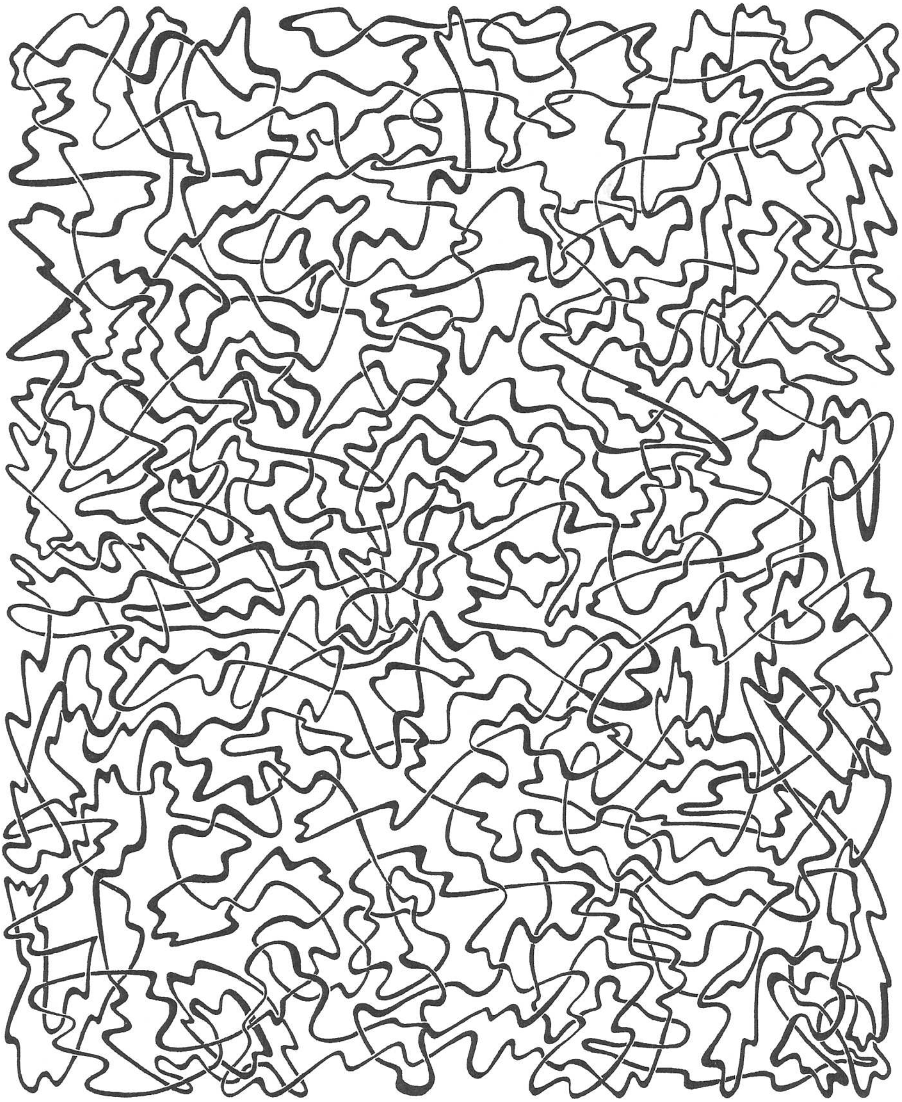
Théologie
La théologie grecque de Pythagore (environ -500 av. J.–C.) à Proclus (environ 500 ap. J.–C.) avec une emphase particulière sur Plotin (environ 250 ap. J.–C.) et son traité sur les nombres. Comment le computationnalisme en science cognitive dégage une interprétation arithmétique des hypostases de Plotin y compris celles censées décrire la matière, et comment peut-on les tester en les comparant à la théorie quantique contemporaine.”

1re partie : Théologie grecque, Sommes et différences

Notes d’Olivier Pirson
olivier_pirson_opi@yahoo.fr
http://www.opimedia.be/

mardi 13 avril 2010

1. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/
2. http://www.ulb.ac.be/cepsy/



120. *Perdre son latin* (Daniel Lehman)

Note d'introduction au séminaire

"Cette année je propose de faire un voyage de DIOPHANTE à PLOTIN, en passant par les mathématiques d'aujourd'hui (RAMANUJAN, HARDY, MATIYASEVIC, FERMAT, WILES).

Le début du cours peut être considéré comme une introduction à la théorie des nombres. On commencera par la contemplation des sommes :

1
$1+3$
$1+3+5$
$1+3+5+7$
$1+3+5+7+9$
etc.

Je suppose que vous voyez déjà ce qui se passe...

Puis les sommes suivantes, qui jouent un rôle dans la "théologie des nombres" développée par les penseurs grecques :

1
$1+2$
$1+2+3$
$1+2+3+4$

À cette occasion je parlerai de la théologie grecque et plus généralement des théologies dites "payennes" (par les chrétiens). En filigrane on va tenter de se faire une idée du pourquoi de sa disparition et de l'éventuelle nécessité de son retour. Le débat est encouragé. Je vous raconterai la vie de PLOTIN, HYPATIA, DIOPHANTE.

Ceci nous introduira à l'étude générale des sommes des carrés, des cubes, etc. Ceci motivera l'introduction au calcul des différences finies, les nombres de BERNOUILLI, le triangle de PASCAL, le triangle de STIRLING.

Puis on va entreprendre l'étude générales des équations diophantiennes. Ce sont des équations polynomiales à coefficients entiers, et on cherche des solutions dans les nombres naturels (ou dans les nombres entiers). Notons que DIOPHANTE cherchait les solutions rationnelles, ce qu'on regardera aussi.

À long terme, l'idée est d'introduire le travail de MATIYASEVICH. Il a découvert un polynôme diophantien universel, ce qui lui a permit de résoudre le 10^{e} problème de HILBERT par la négative : avec la thèse de CHURCH il n'existe pas d'algorithme pour résoudre une équation diophantienne arbitraire. Ce résultat en apparence négatif va nous permettre de plonger l'informatique théorique dans la théorie des nombres, et ceci, in fine, nous permettra d'aborder une nouvelle formulation de la dérivation de la physique à partir de la "théologie des machines" sous la forme d'une interprétation arithmétique des "hypostases de Plotin".

On verra à quel point alors les nombres, les ondes et l'information quantique sont des notions naturelles, et à quel point Plotin est visionnaire dans sa critique d'Aristote, et dans sa conception de la relation entre la réalité et ses représentations.

La fin du cours (vraisemblablement le prochain "summer school") sera plus technique et sera consacrée à une comparaison de l'utilisation des groupes (algébriques) en théorie des nombres et en physique quantique.

Pour la partie "art", je me contenterai de donner des projets de synthèse musicale reposant sur les nombres de Fibonacci.

Je rappelle qu'on ira à notre aise au début, et que la suite dépendra en grande partie de vos questions."

(Bruno Marchal)

À propos de ce document

Ce document est le résultat de notes prises lors du séminaire de Bruno Marchal (que je remercie chaleureusement), mêlées à quelques autres sources et cogitations personnelles. Le tout n'engage que moi.

Sauf oubli, les résultats (trivialités) présentés sans démonstration ni référence se démontrent plus ou moins d'eux-mêmes lorsque l'on prend les résultats les uns après les autres.

Bon voyage. . .

Olivier Pirson

1 Théologie et théorie des nombres

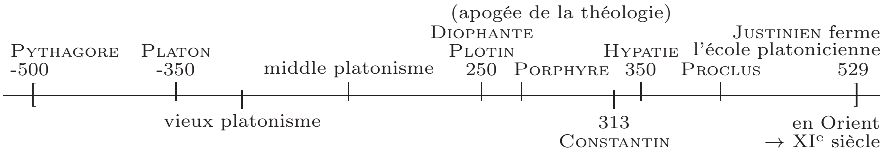
“Secte” des pythagoriciens :

- mathématiciens : ceux qui démontrent les théorèmes
- acousmatiques : ceux qui répètent les théorèmes (aux disciples)

Théologie : terme introduit par PLATON
= science des dieux (concepts)
⋮ néoplatonisme
Dieu

Pendant 1000 ans la théologie fut attachée aux mathématiques.

Théologie platonicienne :



1.1 Notices biographiques

D’après [Universalis], dans l’ordre chronologique :

THALÈS de Milet ($\sim -625 - \sim -547$)

Considéré comme le premier philosophe et mathématicien grec. Selon Diogène LAËRCE il fait partie des sept sages de l’Antiquité. Il se rendit célèbre en prédisant une éclipse vers −585. On pense que ses écrits étaient déjà perdus au temps d’ARISTOTE. On lui attribue cinq théorèmes qui fondent la géométrie élémentaire.

“THALÈS étant, mon cher THÉODORE, tombé dans un puits, tandis que, occupé d’astronomie, il regardait en l’air, une petite servante thrace, toute mignonne et pleine de bonne humeur, se mit, dit-on, à le railler de mettre tant d’ardeur à savoir ce qui est au ciel, alors qu’il ne s’apercevait pas de ce qu’il y avait devant lui à ces pieds !” (*Thééthète*/ PLATON)

ANAXIMANDRE ($\sim -$VIe)

“[. . .] la doxographie ancienne lui attribue une place importante à l’origine des techniques, des sciences et de la philosophie. Il aurait dessiné les premières cartes de géographie et la première carte du ciel. Il aurait introduit en Grèce le *gnômôn*, une règle dressée ou un triangle, dont l’ombre portée sur un cadran permet de repérer l’heure solaire. Il aurait su repérer la position et les intervalles des équinoxes et des solstices.”

“Ce qui est remarquable chez ANAXIMANDRE, c’est qu’il relègue les entités physiques, après avoir évacué les entités mythiques, au profit d’un principe plus reculé (sinon métaphysique), lequel porte le nom de « celui qu’on ne saurait ni limiter ni définir » : un tréfonds « tout enveloppant », à célébrer avec les attributs du divin.” ([Universalis]/ Clémence RAMNOUX)

PYTHAGORE de Samos (~ −580 – ~ −500)

Philosophe et mathématicien, il n’a laissé aucun écrit, n’est connu que par tradition orale. Fils d’un marchand de Tyr (Liban) établi à Samos (île grecque, ouest de la Turquie). Considéré comme le premier pur mathématicien. Il rencontra THALÈS et suivi les cours de son élève ANAXIMANDRE.

−535 : il quitte Samos pour l’Égypte, y adopte de nombreuses croyances.

−525 : emmené prisonnier à Babylone (Selon les Anciens : Porte du dieu, Irak) par les Perses qui envahissent l’Égypte, il y reste cinq ans, y apprend l’arithmétique et autres sciences mathématiques babyloniennes.

~ −520 : il fonde l’école *Demi-cercle* à Samos.

−518 : il émigre à Crotone (Italie du Sud), y crée une école philosophique et religieuse.

Il étudia les principes des mathématiques, les concepts de nombre, de triangle et l’idée abstraite de preuve. Il a sans doute prouvé le théorème portant son nom. On lui doit la valeur de la somme des angles d’un triangle, la découverte des nombres irrationnels, la construction des cinq solides réguliers.

SOCRATE (~ −469 – −399)

Né à Athènes, d’un père artisan sculpteur et d’une mère sage-femme.

Il “n’est pas un philosophe parmi les autres ; il est le totem de la philosophie occidentale. [. . .] L’avènement radical que la tradition lui attribue est, dans une large mesure, une illusion rétrospective, que chacun du reste formule à sa façon. [. . .] Cela dit, il faut bien qu’il y ait eu en cet homme de quoi rendre possibles et la ciguë et PLATON.”

“Des déceptions, peut-être des crises, précèdent la découverte de sa vocation. Il avait déjà des disciples quand l’oracle de Delphes, consulté par l’un d’eux, le désigna entre tous les hommes comme le plus sage et le plus savant (*sophos*). Stupéfait par cette réponse, SOCRATE y voit le signe d’une mission divine ; il ira désormais par les rues et par les places, questionnant chacun, jeune ou vieux, artisan ou notable. Tous croient savoir quelque chose, et ne savent pas qu’ils ne savent rien. Sous le feu des questions de SOCRATE, ces certitudes naïves se dégonflent comme baudruches. Lui, au moins, sait qu’il ne sait rien : l’oracle avait raison.” ([Universalis]/ Jacques BRUNSCHWIG)

Dénoncé “comme impie, introducteur de divinités nouvelles et corrupteur de la jeunesse”, il est condamné à boire la cigüe.

Platon (~ –428 – ~ –347)

–387 **:** il rentre à Athènes, fonde l'*Académie*, première école ouverte à des élèves et non réservées à des sectateurs.

"Si pour certains il a déjà tout dit – l'être travaillé par le négatif et par la différence, la pensée transcendantale et les concepts a priori, la sublimation de l'énergie érotique, la grammaire des propositions –, d'autres réduisent sa pensée à quelques thèses aisément critiquables : le réalisme des Idées, le dualisme de l'âme et du corps, la contemplation d'un principe ineffable. [...] Le plus frappant est qu'il a toujours été un enjeu, à l'intérieur de la philosophie mais aussi hors d'elle, lors de querelles qui, de l'Antiquité chrétienne au Moyen Âge, opposèrent les théologiens partisans d'Aristote à ceux qui s'inspiraient du néoplatonisme, puis (aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles) les trinitaires aux antitrinitaires, ou encore lors de celle, littéraire, qui divisa les Anciens et les Modernes."

"Selon Aristote, Platon aurait d'abord fréquenté Cratyle l'héraclitéen et en aurait conservé toute sa vie la conception d'une réalité sensible en perpétuel écoulement. Il aurait ensuite tenu de Socrate son intérêt pour les problèmes éthiques et les définitions. Jugeant impossible d'arriver à une connaissance ferme à partir de choses en devenir, il se serait, pour les dépasser, inspiré de la théorie pythagoricienne des Nombres, se contentant de les baptiser Idées et de nommer participation l'imitation des Nombres par les choses sensibles." ([Universalis]/ Monique Dixsaut)

Théétète (~ –415 – ~ –369)

Mathématicien grec. Il est peut-être le premier à avoir construit les cinq polyèdres réguliers et le fondateur de la théorie des incommensurables.

Aristote (~ –385 – –322)

Il est le fils de Nicomaque (médecin du roi Amyntas II de Macédoine).

–367 – –366 **:** il entre à l'Académie, devient l'un des plus brillants disciple de Platon.

–343 – –342 **:** il est pendant huit ans le précepteur d'Alexandre, fils de Philippe de Macédoine, fils d'Amyntas.

–335 – –334 **:** retour à Athènes, fonde le *Lycées* ou *Peripatos*.

–323 **:** mort d'Alexandre. Suite à une réaction antimacédonienne, "on lui reproche officiellement d'avoir « immortalisé » un mortel, Hermias, en lui dédiant un hymne". Il fuit pour ne pas donner aux Athéniens l'occasion de « commettre un nouveau crime contre la philosophie ».

"[...] nul n'a marqué autant que lui la philosophie et la science des siècles suivants, peut-être même – et cela jusqu'à nos jours inclusivement – la civilisation qu'il est convenu d'appeler « occidentale ». Son principal titre de gloire a été de fonder la *logique*, c'est-à-dire cet ensemble de règles contraignantes qui permettent de faire du discours (*logos*) l'usage le plus cohérent et, par là, le plus efficace. [...] Esprit organisateur et classificateur, il a énoncé les catégories qui structurent le langage et la pensée de l'homme.

On pourra estimer, au cours des siècles, que le système aristotélicien, devenu au Moyen Âge l'armature de toutes les scolastiques chrétiennes et musulmanes, a figé le progrès de la pensée. Mais il reste que ce système, en dépit de ses imperfections, a été le modèle de toute systématisation future. Et l'on n'a pas assez remarqué que, dans un domaine essentiel et souvent mal compris de sa philosophie, la *métaphysique*, ARISTOTE a lui-même démontré l'impossibilité dernière de ramener l'être à l'unité, reconnaissant ainsi les limites de tout système, le caractère inachevé de toute synthèse et l'irréductibilité de la pensée de l'être à la pure et simple administration, scientifique et technique de ce qu'il y a en lui d'objectivable." ([Universalis]/ Pierre AUBENQUE)

EUCLIDE (–IVe – –IIIe)

Grec, il enseignait la géométrie à Alexandrie (Égypte). Il est l'auteur des *Phénomènes* et surtout des *Éléments*. On ignore tout de sa vie. Ce n'est pas l'EUCLIDE de Mégare (Grèce) du *Théétète*.

ARCHIMÈDE (–287 – –212)

Grec, il fut l'ingénieur en chef de Syracuse (Sicile). Dans les figures qu'il étudie il découvre "des propriétés inhérentes à leur nature, y existant de tout temps, et cependant ignorées de ceux qui m'ont précédé".

APOLLONIOS DE PERGA (~ –262 – ~ –190)

Mathématicien grec de l'école d'Alexandrie, surnommé le Grand Géomètre pour son ouvrage *Traité des sections coniques*. Il y introduit les noms d'ellipse, d'hyperbole et de parabole.

Claude PTOLÉMÉE (~ 100 – ~ 170)

Connu pour le géocentrisme, il est l'auteur de l'*Almageste*, "sorte d'encyclopédie des connaissances d'une époque et qui s'est enrichie avec le temps au point de rendre difficile l'appréciation de son état originel." Elle contient un traité complet de trigonométrie plane et sphérique. "Sans doute fut-il davantage mathématicien qu'astronome, plus polygraphe que savant." "Loué avec excès jusqu'au Moyen Âge, PTOLÉMÉE a été méprisé avec exagération depuis le XVIIe siècle."

DIOPHANTE d'Alexandrie (après –150 – avant 350, prob. IIe – IIIe)

Mathématicien d'Alexandrie, on ne connaît presque rien de sa vie. Auteur des *Arithmétiques* qui devaient comprendre treize livres, dont six nous sont parvenus en grec et quatre furent retrouvés en arabe. Certains y ont vu des éléments de géométrie algébrique et d'algèbre. "Le but de Diophante y est clair : édifier une théorie mathématique dont les éléments constitutifs seraient les nombres, considérés comme pluralités d'unités, et les parties fractionnaires comme fractions de grandeurs."

"Dans les mathématiques hellénistiques, nous ne connaissons aucune influence des *Arithmétiques*. Un passage du *Lexique* de SUIDAS a fait bien des ravages en attribuant à HYPATIE un commentaire du *Canon astronomique* de DIOPHANTE. Mais on sait depuis FABRICIUS qu'il s'agit en fait d'un passage altéré, qu'il convient plutôt d'attribuer à PTOLÉMÉE. Avec beaucoup de témérité, TANNERY a modifié le texte pour attribuer à HYPATIE un commentaire de DIOPHANTE, suscitant ainsi une légende. Or, il a en fait fallu attendre les mathématiciens arabes, et les commencements de l'algèbre par AL-KHWARIZMI et ses successeurs, pour que les *Arithmétiques* fussent lues et commentées ; mais, pour la plupart, ces commentaires les ont infléchies dans un sens algébrique, pour qu'elles trouvent enfin leur place au nombre des travaux sur l'analyse indéterminée". ([Universalis]/ Claude NICOLET)

PLOTIN (~205 – ~270)

Sa philosophie repense PLATON avec des éléments aristotéliciens, stoïciens et une aspiration mystique (mysticisme : 1. Attitude religieuse ou philosophique qui affirme la possibilité d'une union parfaite avec Dieu ou l'Absolu dans la contemplation ou l'extase ; doctrine qui admet la réalité de cette union. 2. Doctrine ou croyance fondée sur le sentiment religieux ou lui faisant une très grande place. – Tendance à se fonder sur le sentiment, et notamment sur le sentiment religieux, sur l'intuition et non sur la raison.) Elle formule un déisme néo-platonicien, recherche du salut autant que de la vérité. Réinterprète le *Parménide* "par sa doctrine de l'Un et par sa conception du double – et unique – mouvement de la procession qui est effusion d'unité et de la conversion ou ascension purificatrice vers le Principe.

Après bien d'autres, JASPERS soulignait naguère toutes les contradictions du plotinisme [...] Depuis la Renaissance, de FICIN et de BRUNO à HARTMANN et à BERGSON, diversement entendu et transposé, il a continué d'inspirer tout ensemble maintes expériences intimes et plus d'un rêve spéculatif." ([Universalis]/ Maurice de GANDILLAC)

L'ensemble de ses écrits, *Les Ennéades* (de *enneas*, le chiffre neuf en grec), on été rassemblés par PORPHYRE après sa mort.

PORPHYRE (234 – ~310)

Né à Tyr en Phénicie.

"Philosophe néo-platonicien, PORPHYRE a joué un rôle considérable dans l'évolution de la pensée, à la fin de l'Antiquité et pendant tout le Moyen Âge. Son œuvre immense, aujourd'hui en grande partie disparue, a été beaucoup lue et a laissé des vestiges chez de nombreux auteurs grecs, latins et arabes. La manière dont il a systématisé et interprété l'œuvre de son maître Plotin a donné naissance à un spiritualisme qu'Augustin a diffusé dans tout l'Occident latin, et à une doctrine de l'activité d'être qui, par l'intermédiaire de Boèce et des néo-platoniciens arabes, a marqué définitivement la pensée philosophique de l'Occident."

"**Philosophie et religion**

Toute sa vie, Porphyre a été préoccupé par les problèmes religieux, tout particulièrement par le rôle des pratiques religieuses pour le salut de l'âme. Il semble bien que l'influence de Plotin l'ait amené à modifier totalement ses conceptions dans ce domaine. Avant de connaître Plotin, en effet, il avait écrit *La Philosophie tirée des oracles*, traité consacré aux pratiques religieuses et magiques capables d'assurer le salut de l'âme et qui témoignait d'un esprit naïf et superstitieux. Après sa rencontre avec Plotin, ainsi qu'il apparaît dans le traité *Sur l'abstinence de la chair des animaux*, dans la lettre *À Marcella*, dans la lettre *À Anébon*, dans la *Vie de Plotin*, dans le traité *Sur le retour de l'âme*, Porphyre professe une tout autre théorie des rapports entre philosophie et religion : les religions ne s'adressent qu'à des dieux inférieurs ou à des démons; la philosophie les transcende, parce qu'elle est le culte du Dieu suprême, dont le philosophe est le prêtre. Ce culte ne consiste que dans l'offrande d'une pensée purifiée de tout ce qui est visible et sensible et il conduit à l'union au Dieu transcendant, dès ici-bas en des moments d'extase, puis définitivement après la mort. Le philosophe est donc le seul à pouvoir espérer être délivré pour toujours du cycle des naissances. Les pratiques religieuses ne peuvent procurer qu'un salut tout relatif, une certaine purification de la partie inférieure de l'âme, qui lui permettra de s'élever dans les astres, sans être délivrée définitivement de sa prison cosmique. C'est dans cette perspective que Porphyre consacre une grande partie de son activité littéraire à critiquer et à juger les traditions religieuses : le gnosticisme [en histoire, doctrine d'un ensemble de sectes religieuses pendant les premiers siècles de notre ère, connaissance ésotérique parfaite et initiatique contenant toutes les connaissances sacrées] (en des ouvrages malheureusement perdus), les oracles chaldaïques (avec le traité *Sur le retour de l'âme*), la religion traditionnelle de la Grèce (lettre *À Anébon*), la religion chrétienne (traité *Contre les chrétiens*).

La critique du christianisme

Si le christianisme était, comme le judaïsme, la religion traditionnelle d'un peuple particulier, Porphyre lui ferait une place dans son système religieux, à côté des autres religions qui sont subordonnées à la religion du philosophe. Mais, d'une part, alors qu'il est privé de tout fondement historique, le christianisme prétend être la religion universelle et absolue, d'autre part, il implique une conception absurde et irrationnelle de la divinité. Il est donc condamné, aussi bien du point de vue des religions particulières que du point de vue transcendant de la philosophie.

La religion chrétienne n'est pas fondée historiquement. Elle prétend sans doute s'enraciner dans la tradition juive, mais les chrétiens ne font que s'approprier l'histoire du peuple juif, dont pourtant ils ne respectent pas les traditions nationales. Or, rien ne justifie cette appropriation : les écrits juifs n'ont rien à voir avec le christianisme. Et, d'ailleurs, il ne subsiste rien de l'œuvre de Moïse ; tous ses ouvrages ont été brûlés avec le Temple. Ce qui existe sous son nom a été composé plus de mille ans après sa mort par le grand prêtre Esdras. De même, le *Livre de Daniel* ne date pas du temps de Cyrus ; c'est une prophétie *post eventum* composée au temps d'Antiochus Épiphane. On voit par là comment Porphyre devance les conclusions de la critique historique moderne. Les traditions proprement chrétiennes n'ont pas plus de valeur historique. Les récits évangéliques sont remplis de contradictions et d'incohérences ; les Apôtres ont déformé l'enseignement de Jésus. Ainsi, le christianisme n'est pas assuré de l'authenticité de ses propres traditions.

Porphyre s'en prend, d'autre part, à la conception absurde que les chrétiens se font de Dieu ; le Dieu qui est le leur est un tyran aux caprices imprévisibles qui a accompli et accomplira une suite d'actions totalement arbitraires : la création du monde à un moment du temps, l'élection du peuple juif, l'Incarnation, la Résurrection, enfin la destruction du monde qu'il avait lui-même créé. On dira « Dieu peut tout ». « Cela n'est pas vrai, répond Porphyre, Dieu ne peut faire que deux fois deux fassent cent et non pas quatre. Sa puissance n'est pas l'unique règle de ses actes et de sa volonté. Il observe la loi de l'ordre. »

Le spiritualisme

On tient habituellement Porphyre pour l'éditeur et le vulgarisateur de Plotin. Cette vue est exacte, mais incomplète. Il est vrai que Porphyre a publié les écrits de son maître sous le titre *Ennéades*, qu'il les a commentés, résumés et paraphrasés abondamment. Des recherches ont montré que la fameuse *Théologie d'Aristote*, conservée en traduction arabe (et en traduction latine, dans une autre version), est en fait une paraphrase porphyrienne des écrits de Plotin. Cet ouvrage a véhiculé les idées néo-platoniciennes dans le monde arabe et le monde occidental.

Pourtant, en éditant et en commentant Plotin, Porphyre a subtilement transformé ou déformé la pensée du maître. Déjà l'édition des *Ennéades* laisse entrevoir ces interventions. À l'ordre chronologique des écrits, Porphyre a substitué un ordre systématique fondé sur une division très particulière des parties de la philosophie qui correspond aux étapes d'un progrès spirituel : éthique, physique, théologie (ou métaphysique). Mais, surtout, si l'on entend par spiritualisme une philosophie centrée sur la réalité substantielle et les caractéristiques propres de l'esprit, on pourra dire que Porphyre a donné au plotinisme la forme d'un spiritualisme. Par exemple, les *Sentences introduisant aux intelligibles* (petit recueil dans lequel Porphyre expose ses conceptions métaphysiques fondamentales) insistent fortement sur l'opposition radicale entre la substance intelligible (ou spirituelle), dont les parties sont intérieures les unes aux autres, et la substance matérielle, dont les parties sont extérieures les unes aux autres. Il définit ainsi ces deux types de réalité d'une manière que Bergson, en éliminant tout substantialisme, retrouvera dans l'*Essai sur les données immédiates de la conscience*. Le spiritualisme porphyrien est particulièrement manifeste dans la pensée du jeune Augustin, telle qu'elle s'exprime dans ses *Dialogues* de Cassiciacum.

La doctrine de l'acte d'être

Les recherches contemporaines (P. Hadot, S. Pines) laissent entrevoir, par une convergence d'indices caractéristiques et indépendants (étude d'un fragment de commentaire sur le *Parménide*, de textes néo-platoniciens arabes, de la doctrine de Marius Victorinus), que Porphyre a eu une doctrine de l'être tout à fait originale. Ici encore, Porphyre transforme et déforme la pensée de son maître Plotin. Celui-ci avait posé au-delà de l'Esprit, Substance première, un principe absolument simple, sans substance, sans pensée, qu'il avait appelé l'« Un ». Mû à la fois par le besoin de résoudre certaines difficultés de l'exégèse de Platon et par la logique interne de sa pensée, Porphyre identifie l'Un de Plotin avec une pure activité d'être : « L'Un, qui est au-delà de la substance et de l'étant, n'est ni étant ni substance, mais plutôt il agit et il est lui-même l'agir pur, en sorte qu'il est l'Être, l'Être qui est avant l'étant et comme l'Idée de l'étant. » En son origine transcendante, toute réalité particulière vient coïncider avec cette activité pure d'être, infiniment simple. Pour la première fois dans l'histoire de la pensée occidentale, l'être-infinitif est clairement distingué de l'être-participe. Cet être-infinitif est indissolublement agir et idée, sommet de l'activité et de l'indétermination. Cette distinction se retrouvera dans le *De hebdomadibus* de Boèce qui la transmettra au Moyen Âge. Elle reparaîtra sous une forme nouvelle dans la différence ontologique selon Heidegger." ([Universalis]/ Pierre Hadot)

Jamblique (~250 – ~330)

Né à Chalcis de Syrie. Son grand écrit théologique est le *Traité des mystères d'Égypte*.

"[...] le troisième maître de l'école néo-platonicienne, après Plotin et Porphyre. Il en recueille la succession au moment où l'école est aux prises avec un problème grave. Devant la montée du christianisme, un disciple de Pythagore et de Platon peut-il rester indifférent et laisser périr les traditions religieuses de l'Antiquité, qui semblent faire partie de l'héritage culturel hellénique ? Par ailleurs, n'est-il pas urgent de revigorer cet héritage lui-même en puisant aux sources orientales dont il est issu ? C'est, en effet, une opinion fréquente chez les philosophes de cette époque que la plus haute sagesse métaphysique et religieuse vient d'Égypte où Pythagore et Platon eux-mêmes sont allés chercher leur meilleure inspiration. Mais cette sagesse ne se présente pas sous une forme exclusivement spéculative. Elle se cristallise dans un ensemble touffu de pratiques minutieuses qu'on désigne sous le nom de « théurgie » [magie qui se met directement en rapport avec les esprits pour utiliser leurs pouvoirs]. Il faut entendre par là une sorte de sacramentalisme qui parfois dégénère en magie. Les rites théurgiques sont des signes sensibles auxquels les puissances divines auraient conféré un pouvoir bénéfique.

Alors que Plotin s'était tenu délibérément à l'écart de cette liturgie, que son disciple Porphyre avait oscillé de l'adhésion à la critique, Jamblique s'engage résolument dans la défense de la théurgie. Il va tenter de justifier, et en même temps d'épurer, le paganisme menacé en lui fournissant une base spéculative. Mais cette alliance imprime au néo-platonisme un caractère nouveau et inaugure une lignée dont Proclos, au Ve siècle, sera un remarquable représentant. Cette orientation vaudra à Jamblique l'admiration de l'empereur Julien, restaurateur du paganisme. Mais, finalement, elle amènera en 529 la fermeture de l'école d'Athènes par l'empereur Justinien, et l'expulsion du dernier néo-platonicien Damascios. L'opposition au christianisme était désormais considérée comme séditieuse."

"*Protreptique*, c'est-à-dire une introduction à la philosophie [...] Cet ouvrage porte la marque de l'influence aristotélicienne, et on soupçonne Jamblique d'avoir fait de larges emprunts au traité perdu du jeune Aristote, qui portait le même nom.

Signalons ensuite un ensemble d'études néo-phythagoriciennes. Jamblique se présentait comme pythagoricien aussi bien que comme platonicien. Les deux écoles ont eu, en effet, des échanges constants, et parfois il est difficile de les distinguer. D'un recueil sans doute plus vaste subsistent une *Vie de Pythagore*"

"**L'âme et les mathématiques**

L'œuvre de Jamblique, assez disparate, ne peut être ramenée à un système. L'auteur procède par compilation plutôt que par construction. Il rapporte les doctrines qu'il admire et qui, souvent, sont hétérogènes. On devra donc se borner à y discerner deux thèmes principaux et, en premier lieu, le thème à la fois néo-pythagoricien et platonicien de l'âme mathématicienne. Jamblique le développe surtout dans son *De communi mathematica scientia*. Comment un traité d'épistémologie mathématique peut-il être en même temps un traité de l'âme ? Il faut se souvenir ici que Platon, dans le *Timée* 35a, définit l'âme comme la médiation entre l'intelligible indivis [non partagé] et la division du sensible. Ainsi l'âme assure-t-elle la liaison de l'univers par ses connexions internes. Elle déploie l'intelligible jusqu'à former l'extraposition des corps. Inversement, elle concentre le sensible pour le réintégrer, autant que faire se peut, dans l'intelligible. Or, telle est justement la fonction des mathématiques. Parce que leurs objets sont plus divisés que les pures idées, mais moins que les phénomènes, les mathématiques sont capables de rationaliser les phénomènes en phénoménalisant la pensée. Elles ont le secret d'une multiplication et d'un espace qui demeurent immanents à leur acte constituant. La raison mathématique est donc un ordre moyen, mais actif en ce sens qu'il s'avance vers le sensible pour le ramener à l'idée. Il y a donc une nécessaire connaturalité ente l'âme et les mathématiques. « La notion de l'âme, écrit JAMBLIQUE, contient spontanément la plénitude totale des mathématiques. » JAMBLIQUE refuse de définir l'âme par un seul type d'intelligibilité mathématique, c'est-à-dire comme une figure, un nombre, un rapport ou tels mouvements astronomiques. Mais il ne veut pas davantage qu'on en fasse la somme de ces objets. L'âme est leur commun pouvoir de constitution et, à travers lui, elle s'accomplit elle-même. En projetant, à partir de sa substance, les raisons mathématiques, l'âme actualise sa fonction médiatrice. Elle se comprend et entre en possession d'elle-même.

La théurgie

Le second thème qui caractérise l'œuvre de JAMBLIQUE est celui qui constitue le principal objet du *De mysteriis*. Cet écrit se présente comme réponse à une série de questions posées par PORPHYRE à un certain ANÉBON sur les dieux et les démons. C'est « maître ABAMMON » qui donne la réplique. D'après PROCLOS, ce nom est un pseudonyme de JAMBLIQUE. Mais on est surpris par le ton solennel et dogmatique que JAMBLIQUE affecte envers son ancien maître.

On aperçoit dans cet ouvrage, outre les influences que JAMBLIQUE accueille ordinairement, celle des écrits éclectiques d'HERMÈS Trismégiste, composés entre 100 et 300 de notre ère, et celle des *Oracles chaldaïques*, recueil philosophico-religieux publié par JULIEN le Théurge à la fin du Ier siècle, et qui déjà avait impressionné PORPHYRE. Le dessein de JAMBLIQUE est d'établir que la théurgie n'est nullement un amas de superstitions, mais qu'elle est exigée par une théologie pleinement informée. Bien plus, la négliger serait admettre que l'homme peut se diviniser lui-même par les seules ressources de sa sagesse. Nous n'avons pas en nous-mêmes ce qu'il faut pour nous libérer ; nous n'y parviendrons que par une régénération, c'est-à-dire par une opération divine incommensurable à notre nature. JAMBLIQUE vise ici sans le nommer PLOTIN, qu'il soupçonne de rationalisme.

Le but de la théurgie n'est pas de procurer des avantages matériels, des bienfaits corporels ni même des consolations spirituelles, bien qu'elle ait parfois cet effet, mais ce n'est que moyen. La fin dernière de la théurgie et de tout culte divin est la déification de l'âme, c'est-à-dire l'union mystique avec l'Ineffable, qui est au-delà même de l'unité intelligible (VIII, II). Mais il n'est pas possible de parvenir immédiatement à ce terme suprême, et certainement peu d'âmes y parviennent. Il faut donc ménager des intermédiaires et gravir des degrés de culte de plus en plus purs. À ceux-ci correspondent des ordres différents de démons ou de dieux et des niveaux distincts de l'âme. Par exemple, un degré inférieur de culte exigera des sacrifices d'animaux, tandis qu'un degré plus élevé prescrira des invocations de noms divins proférés dans leur langue originelle, et non traduits en grec. Quel que soit son niveau, aucun rite n'entraîne chez les dieux une passivité ni ne confisque leur puissance au profit des fins personnelles de l'homme. L'efficacité des pratiques de la prière ne vient pas de notre initiative, mais de celle des dieux qui ont choisi les signes de leur pouvoir et nous portent à les mettre en œuvre. On n'est pas exaucé parce que l'on prie, mais on prie parce que la notion antécédente des dieux suscite à la fois la prière et le bienfait, qui finalement s'identifient.

Il y a dans Jamblique plusieurs personnages : le néo-platonicien qui exprime sa mystique dans le langage de l'immanence ; le théologien littéral qui formule les communications divines dans le registre de la transcendance. Les deux problématiques n'étaient peut-être pas inconciliables, et Proclos s'efforcera de les intégrer dans l'harmonie. Mais Jamblique semble osciller de l'une à l'autre sans trouver le point d'équilibre. En tout cas, son attachement aux traditions religieuses va marquer pour longtemps le néo-platonisme. Il sera considéré par ses successeurs comme un inspiré plus encore que comme un philosophe. Peut-être l'impulsion donnée par le « divin Jamblique » contribuera-t-elle à porter le néo-platonisme jusqu'à la théologie négative radicale et antithétique de Damascios." ([Universalis]/ Jean Trouillard)

Constantin le Grand (285 – ~337)

310 : vision authentique qui le rallie au culte solaire apollinien.

312 : il "était chrétien sans le savoir, et le devint pour de bon quand on l'eut persuadé qu'il l'était" ou il eut une autre vision.

313 : *Lettre de Milan* qui garantit la tolérance aux chrétiens et équivaut à une reconnaissance officielle du christianisme.

324 : création de Constantinople (ancienne Byzance) au lendemain de sa victoire sur Licinius qui régnait sur le monde oriental.

325 : concile de Nicée, il s'auto-proclame treizième apôtre. Définition du Credo orthodoxe, condamnation des ariens (partisans de l'arianisme, doctrine d'Arius, prêtre d'Alexandrie au début du IVe). Il les rappellera et mourra baptisé par un évêque arien.

Il autorisa l'Église à recevoir des legs. Accorda aux évêques un pouvoir juridique. Se perd entre le césaropapisme (régime dans lequel le souverain s'érige en plus haute autorité religieuse) et la théocratie (système dans lequel les prêtres exercent le pouvoir au nom de Dieu).

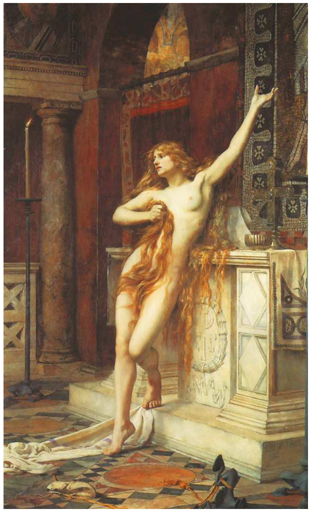
Hypatie (~370 – 415)

Elle est la fille du mathématicien Théon d'Alexandrie, de qui l'on doit une méthode de calcul des racines carrées.

D'après *Le théorème du perroquet* (Denis Guedj) :

On disait son frère Épiphane moins doué que sa sœur. Elle travaille d'après Apollonios, Diophante et Ptolémée. Elle enseigne la philosophie et la mathématique. “Des centaines d'auditeurs se pressaient à ses cours, subjugués par son intelligence, son savoir… et sa beauté.”

“Un jour de l'année 415, la populace, longuement travaillée par les hommes du patriarche d'Alexandrie, se rua sur son char, la jeta par terre, lui ôta ses habits et la traîna dans un sanctuaire. Elle fut torturée, à l'aide de coquille d'huîtres aiguisées comme des lames, avant d'être brûlée vive.”



(Charles William Mitchell, 1885)

Proclus (412 – 485)

Né à Byzance.

“Dans la condition historique qui était la sienne, le génie propre de Proclus a conduit le néo-platonisme à ce point d'équilibre qu'on peut appeler classique. Entre la puissance inventive un peu désordonnée de Plotin, qui fonde l'école néo-platonicienne au III^{e} siècle après J.–C., et l'analyse critique de Damascios, qui est son dernier maître à Athènes au VI^{e}, Proclus apparaît comme son grand architecte.”

“Proclus lui-même est curieux de tous les mythes et rites grecs et barbares, au point de se nommer lui-même le « hiérophante du monde entier ». Il accueille donc une théologie, ou plutôt une mythologie très touffue, qu'il interprétera d'ailleurs librement. Il intègre la théurgie, ensemble de signes sensibles opératoires qui prétendent compléter la contemplation par une sorte d'initiation divine. Mais, tandis que Jamblique est plutôt compilateur et théologien, Proclus se préoccupe d'ordonner tous ces éléments à l'intérieur d'un système strictement rationnel.” ([Universalis]/ Jean Trouillard)

Justinien I^{er} (482 – 565) (Flavius Petrus Sabbatius Justinianus)

Né à Tauresium (près de l'actuelle Skoplje, capitale de la république de Macédoine). Son long règne “ne marqua pas, comme il le voulait, le commencement d'une ère nouvelle, mais la fin d'une grande époque moribonde” ([Universalis]/ G. Ostrogorsky)

"À son avènement, en 527, cet homme déjà mûr apportait, à la réalisation d'un plan de gouvernement longtemps médité, les ressources d'une riche personnalité, un immense savoir, une très grande puissance de travail, une simplicité de mœurs poussée jusqu'à l'ascétisme (il était végétarien et buveur d'eau), assortis d'un véritable culte de l'État et de l'idée impériale. Il fut servi aussi par de remarquables collaborateurs". ([Universalis]/ José Grosdidier de Matons)

1.2 La vérité est mathématique

"Une âme, si elle veut se connaître, n'est-ce pas dans une autre âme qu'elle doit se regarder ?"

(Socrate)

L'idée que la vérité absolue est mathématique.
∼ Mysticisme, la vérité est en nous.
La réalité du monde n'est pas ce que l'on voit ou ce que l'on mesure.

Aristote renverse ça, il réifie la matière. Physicalisme. Il fait de l'étude de la nature la science fondamentale. Il va dans le sens commun : la réalité c'est ce que l'on voit. Il est le "premier" non-platoniste.

→ chrétiens : | Saint Augustin (354 – 430) :
  il reprend presque tout ($^2/_3$) Plotin
  Saint Thomas d'Aquin (1224 ou 1225 – 1274)

Diophante : *Arithmetica* : 13 volumes

- 6 volumes transmis par Hypatie
- 4 volumes retrouvés en arabe

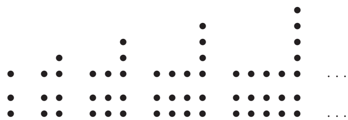
Plotin :

- Un
- Intelligible : raison
- Âme (universelle) ($\neq$ l'âme chrétienne = réceptacle de la subjectivité)

La cabale serait une "mystification" de Plotin.

Pythagore :

- nombres impairs : masculins, gnomons
- nombres pairs : féminins



Jamblique :
1 : dieu (concept)
2 : dyade indéfinie, second dieu de Plotin

⋮
10

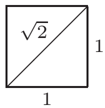
Nombres naturels :

0 : n'existe pas pour les grecs
1 | ne sont pas des nombres pour les grecs
2 |
3 : "premier" nombre pour les grecs
4
⋮

Porphyre transmet l'œuvre complète de Plotin.

Hypatie enseigne Plotin et Diophante.

Pythagoriciens : « Tout est nombre, ou rapport de nombres. » Sous-entendu, nombre entier, ou rapport de nombres entiers. Ils étaient persuadés que deux segments de droites sont commensurables.
C'est une erreur. La diagonale du carré le reflète.
$\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ 7\ldots$
n'est rapport d'aucun nombre entier, c'est un nombre irrationnel (il possède une infinité non périodique de décimales).



(Y a-t-il un lien avec le principe d'indétermination d'Heisenberg ?)

La **thèse de Church** (TC, ou de Church-Turing, anticipée par Post) (c.-à-d. l'universalité de la notion de "calculable") réhabilite Pythagore.

À chaque fois que l'on étend les classes de nombres, il en reste de nouveaux à ajouter :
- n naturels
- $-n$ entiers
- m/n rationnels
- $\sqrt{\ }$ irrationnels algébriques
- e, π transcendants ($\Rightarrow$ impossibilité de la quadrature du cercle à la règle et au compas)
- i complexes
- ...

Mais les équations diophantiennes d'après Matijasevitch limitent cette fuite en avant. On a tous les nombres en un certain sens. Fermé pour la diagonalisation.

Résultat du **computationnalisme** selon Bruno Marchal :

Si on des machines **alors** la physique est une branche de la théologie.

(Usage précédent des termes biologie, psychologie et théologie.)

Voir les publications[3] de Bruno Marchal.

3. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/publications.html

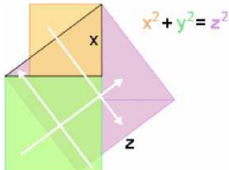
2 Triplets pythagoriciens

~ -1800 : Babyloniens

x	y	z
120	119	169
3 456	3 367	4 825
4 800	4 601	6 649
13 500	12 709	18 541
72	65	97
360	319	481
2 700	2 291	3 541

Tablette Plimpton 322 avec ce genre de nombres, originellement en base 60

Ce sont des triplets pythagoriciens, solutions naturelles (entières positives) de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$



([Wikipédia])

Théorème de Pythagore :

> Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés

(x, y, z) est appelé triplet pythagoricien si $x, y, z \in \mathbb{N}_*$ et $x^2 + y^2 = z^2$

$\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ sont les points de coordonnées rationnelles > 0 du cercle de rayon 1

Le triplet pythagoricien (x, y, z) est dit primitif

$$\text{si}\ \left|\begin{array}{l} x \perp y \\ x \perp z \\ y \perp z \end{array}\right. \qquad \text{(c.-à-d. que } x,\ y \text{ et } z \text{ sont premiers entre eux, cf. p. 45)}$$

$\forall (x, y, z)$ triplet pythagoricien :

$$\left|\begin{array}{l}
(y, x, z) \text{ est un triplet pythagoricien} \\
(x \text{ ou } -x, y \text{ ou } -y, z \text{ ou } -z) \text{ sont des solutions entières de } x^2 + y^2 = z^2 \\
x \neq y \\
3 \leqslant \min\{x, y\} < \max\{x, y\} < z \\
4,24 < 3\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}\min\{x, y\} < z < \sqrt{2}\max\{x, y\} \\
(x, y, z) \text{ est primitif} \iff x \perp y \iff x \perp z \iff y \perp z \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x \not\equiv y\ [2] \quad (x \text{ et } y \text{ sont de parités différentes}) \\ z \text{ est impair} \end{array}\right. \\
\exists! (x', y', z') \text{ triplet pythagoricien primitif}, \exists!\, k \in \mathbb{N} : \\
\quad (x, y, z) = k(x', y', z')
\end{array}\right.$$

$$\forall x \in \mathbb{N}+3 : \left|\begin{array}{l}
x \text{ est impair} \iff \left(x, y := \frac{x^2-1}{2}, \frac{x^2+1}{2} = y+1\right) \\
\qquad \text{est un triplet pythagoricien primitif ordonné} \\
x \text{ est pair} \iff \left(x, y := \frac{x^2}{4} - 1, \frac{x^2}{4} + 1 = y + 2\right) \\
\qquad \text{est un triplet pythagoricien (ordonné} \Leftrightarrow x \neq 4)
\end{array}\right.$$

> Il existe une infinité de triplets pythagoriciens primitifs

Le cercle de rayon 1 possède une infinité de points de coordonnées rationnelles

Pour $x = 3 :\ (3, 4, 5)$ Pour $x = 4 :\ (4, 3, 5)$
Pour $x = 5 :\ (5, 12, 13)$ Pour $x = 6 :\ (6, 8, 10) = 2.(3, 4, 5)$
Pour $x = 20 :\ (20, 99, 101)$ Pour $x = 21 :\ (21, 220, 221)$
On constate que l'on ne sait pas obtenir, par exemple, $(20, 21, 29)$ par cette méthode.

$\forall a, b \in \mathbb{N}_* :\ a > b \implies (2ab, a^2 - b^2, a^2 + b^2)$ est un triplet pythagoricien (primitif $\iff a \perp b$) (ordonné $\iff a > (1 + \sqrt{2})b \simeq 2,41.b$)

Démonstration
$2ab,\ a^2 - b^2,\ a^2 + b^2 \in \mathbb{N}_*$ et $(2ab)^2 + \left(a^2 - b^2\right)^2 = \left(a^2 + b^2\right)^2$

Si p premier divise $2ab$ et a^2+b^2, alors il divise ab, et (cf. lemme d'Euclide, p. 46) soit il divise a et b^2, soit il divise b et a^2, donc il divise a et b. Inversement si p divise a et b, il divise $2ab$ et $a^2 + b^2$.
Donc, le triplet est primitif $\iff 2ab \perp (a^2 + b^2) \iff a \perp b$

Soit $k \in \mathbb{N}_* :\ a = b + k$
Le triplet est ordonné $\iff 2(b + k)b < (b + k)^2 - b^2$
$\iff \sqrt{2}\,b < k = a - b$ □

$\forall (x, y, z)$ triplet pythagoricien primitif avec x pair, $\exists!\, a, b \in \mathbb{N}_* : \left\lvert \begin{array}{l} x = 2ab \\ y = a^2 - b^2 \\ z = a^2 + b^2 \end{array} \right.$ De plus : $\left\lvert \begin{array}{l} a \perp b \\ a = \sqrt{\frac{z+y}{2}} \quad > \quad b = \sqrt{\frac{z-y}{2}} \end{array} \right.$

Démonstration
x étant pair, y et z sont impairs, donc $\frac{z+y}{2}$ et $\frac{z-y}{2} \in \mathbb{N}_*$
$x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y) \implies \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{z+y}{2}\frac{z-y}{2}$ est un carré.
Si p premier divisait $\frac{z+y}{2}$ et $\frac{z-y}{2}$, il diviserait aussi y et z. Comme le triplet est primitif, $y \perp z$, donc $\frac{z+y}{2} \perp \frac{z-y}{2}$, d'où $\frac{z+y}{2}$ et $\frac{z-y}{2}$ sont aussi des carrés.

Donc $a := \sqrt{\frac{z+y}{2}}$ et $b := \sqrt{\frac{z-y}{2}} \in \mathbb{N}_*$

$2ab = 2\sqrt{\frac{z+y}{2}}\sqrt{\frac{z-y}{2}} = 2\sqrt{\frac{(z+y)(z-y)}{4}} = \sqrt{z^2 - y^2} = \sqrt{x^2} = x$

$a^2 - b^2 = \frac{z+y}{2} - \frac{z-y}{2} = y$

$a^2 + b^2 = \frac{z+y}{2} + \frac{z-y}{2} = z$ et l'unicité se vérifie aisément □

$\forall (x, y, z)$ triplet pythagoricien, $\forall (x', y', z')$ triplet pythagoricien primitif, $\forall k \in \mathbb{N}_*$ tel que $(x, y, z) = k(x', y', z')$ avec x' pair : k est un carré $\iff \exists a, b \in \mathbb{N}_* : \left\lvert \begin{array}{l} x = 2ab \\ y = a^2 - b^2 \\ z = a^2 + b^2 \end{array} \right.$ De plus : $\left\lvert \begin{array}{l} a \sqcap b = \sqrt{k} \\ a = \sqrt{\frac{z+y}{2}} > b = \sqrt{\frac{z-y}{2}} \end{array} \right.$

En physique quantique ? $\begin{array}{ll} a\,|+\rangle + b\,|-\rangle & \\ |a|^2 \quad + |b|^2 & \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l} a\,|+\rangle + b\,|-\rangle + c\,|\pm\rangle \\ |a|^2 \quad + |b|^2 \quad + |c|^2 \end{array}$

Grand théorème de Fermat (Andrew Wiles, Richard Taylor, 1995) :
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}{+}\mathbf{3}, \forall x, z, y \in \mathbb{N}_* : \; x^n + y^n \neq z^n}$

3 Commutativité de la multiplication

3.café = café + café + café
$3.4 = 4 + 4 + 4$

café.3 = ?
$4.3 = 3 + 3 + 3 + 3$

Représentation des pythagoriciens (nombres géométriques) :

$1 = \bullet$, $2 = \bullet\,\bullet$, $3 = \overset{\bullet}{\bullet\;\bullet}$, $4 = \begin{smallmatrix}\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet\end{smallmatrix}$, ...

3.4 =  = 12

4.3 =  = 12

Dans cette représentation la commutativité n'est pas évidente.

Autre représentation : $1 = \bullet$, $2 = \bullet\bullet$, $3 = \bullet\bullet\bullet$, $4 = \bullet\bullet\bullet\bullet$, ...

$2 + 3 = \begin{array}{l}\bullet\bullet\\\bullet\bullet\bullet\end{array}$

$3.4 = \begin{array}{l}\bullet\bullet\bullet\bullet\\\bullet\bullet\bullet\bullet\\\bullet\bullet\bullet\bullet\end{array}$

$4.3 = \begin{array}{l}\bullet\bullet\bullet\\\bullet\bullet\bullet\\\bullet\bullet\bullet\\\bullet\bullet\bullet\end{array}$ rotation de 90°

On *voit* alors que $3.4 = 4.3$, et plus généralement que $a.b = b.a$

4 Sommes figurées

4.1 Symbole somme : $\sum$

$\sum\limits_{P(i)} s_i :=$ somme de tous les s_i tels que la propriété P est vraie pour i

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \sum_{i=a}^{b} s_i := \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ a \leqslant i \leqslant b}} s_i = s_a + s_{a+1} + s_{a+2} + \cdots + s_{b-2} + s_{b-1} + s_b$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i := \sum_{i \in \mathbb{N}} s_i = s_0 + s_1 + s_2 + \cdots = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} s_i$$

C'est la notation Sigma, introduite par Joseph Fourier en 1820.

Ce sont des sommes formelles : s'il y a une infinité de termes $\neq 0$ la valeur de la somme n'est pas forcément définie.

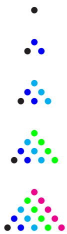
La somme vide : $\sum_{i \in \emptyset} s_i = 0$

Calculons maintenant de façon visuelle quelques sommes remarquables.

4.2 Somme des n premiers naturels (non nuls) : t_n

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ t_n := \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = ?$$

$$\begin{aligned}
t_0 &= & &= \mathbf{0} \\
t_1 &= 1 & &= \mathbf{1} \\
t_2 &= 1 + 2 & &= 3 \\
t_3 &= 1 + 2 + 3 & &= 6 \\
t_4 &= 1 + 2 + 3 + 4 & &= 10 \\
t_5 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 & &= 15
\end{aligned}$$



Ce sont les nombres triangulaires [OEIS, A000217]

...

t_4  est la tétractys, le fameux symbole pythagoricien (http://en.wikipedia.org/wiki/Tetractys)

De manière visuelle  (pour $n = 3$)

ou par le truc de Gauss[4]

$$\begin{array}{rcccccccccc}
t_n = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots + & (n-1) & + & n \\
t_n = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots + & 2 & + & 1 \\
\hline
2t_n = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

on montre que $2t_n = n(n+1)$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ t_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

On constate aussi de manière visuelle  (pour $n = 3$) que $\forall n \in \mathbb{N}_* : \ t_{n-1} + t_n = n^2$

Remarquons qu'une fois établie, la relation $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (de même pour les suivantes) se démontre facilement par récurrence (cf. annexe p. 68) :

4. On raconte que le professeur du jeune Gauss (9 ans) voulant avoir la paix pendant un moment demanda à ses élèves de calculer une somme du genre $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$. Le jeune génie lui donna la réponse (5 050) avant qu'il n'ait le temps de dire ouf !-)

Démonstration par récurrence

Cas de base : $t_0 = 0 = \frac{0.1}{2}$

Cas suivant, pour se rassurer : $t_1 = 1 = \frac{1.2}{2}$

Supposons maintenant que $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Et vérifions que $t_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

En effet : $t_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $\square$

En prolongeant la récurrence $t_{n+1} = t_n + (n+1)$ sur les **entiers** on obtient les nombres triangulaires généralisés :

$$\forall n \in \mathbb{Z} : t_n = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^{\overline{2}}}{2} = \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} = \textstyle\int \bullet(n+1) \overset{(n \geqslant -1)}{=} \binom{n+1}{2}$$ [5]

$$= t_{n-1} + n = \begin{cases} t_{n-1} - \lfloor\sqrt{2t_{n-1}}\rfloor & \text{si } n \leqslant 0 \\ t_{n-1} + \lceil\sqrt{2t_{n-1}}\rceil & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \left| \begin{array}{l} t_{-n} = t_n - n = t_{n-1} = \frac{n^{\underline{2}}}{2} \\ t_n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

$$\check{t_\bullet} = E^{-1}\, t_\bullet$$

n	$\ldots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\ldots$
t_n		10	6	3	1	0	**0**	**1**	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \left| \begin{array}{l} \int_n^{n+2} t_\bullet = t_{n+1} + t_n = 2t_n + n + 1 = (n+1)^2 = s_{n+1} \\ \Delta\, t_\bullet(n) = t_{n+1} - t_n = n + 1 \end{array} \right.$$ [5]

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \left| \begin{array}{ll} t_{2n} & = 2t_n + n^2 = 2t_n + s_n \\ t_{2n+1} & = 2t_n + (n+1)^2 = 2t_n + s_{n+1} \\ & = 2t_{n+1} + n^2 - 1 = 2t_{n+1} + s_n - 1 \end{array} \right.$$

Pour $n = 2$: 

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \; n \equiv 0 \text{ ou } 3\ [4] \iff t_n \equiv 0\ [2]$$

4.3 Somme des n premiers naturels pairs (non nuls)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} 2i = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2t_n = n^2 + n = n(n+1) = n^{\overline{2}} = (n+1)^{\underline{2}}$$

Ce sont les nombres oblongs (ou proniques, hétérocémiques) [OEIS, A002378]

n	$\ldots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\ldots$
$2t_n$		20	12	6	2	0	**0**	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	

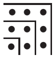
5. Les puissances factorielles montantes $x^{\overline{k}}$ et descendantes $x^{\underline{k}}$ sont définies en annexe p. 71. Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ sont définis en annexe p. 73. Les opérateurs aux différences finies Δ et $\int$ sont définis au chapitre 5 p. 23.
$\forall x \in \mathbb{R} :$ $\lfloor x \rfloor$:= x arrondi à l'unité inférieure, $\lceil x \rceil$:= x arrondi à l'unité supérieure.

4.4 Somme des n premiers naturels impairs : s_n

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ s_n := \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = ?$$

$$\begin{array}{ll} s_0 = & = \mathbf{0} \\ s_1 = 1 & = \mathbf{1} \\ s_2 = 1+3 & = 4 \\ s_3 = 1+3+5 & = 9 \\ s_4 = 1+3+5+7 & = 16 \\ s_5 = 1+3+5+7+9 & = 25 \\ \ldots & \end{array}$$

Ce sont les nombres carrés
[OEIS, A000290]

De manière visuelle  (pour $n = 3$), on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ s_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

On aurait pu calculer directement

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = 2t_n - n = n^2 + \cancel{n} - \cancel{n} = n^2$$

En prolongeant la récurrence $s_{n+1} = s_n + 2n + 1$ sur les **entiers** on obtient les nombres carrés généralisés :

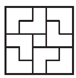
$$\boxed{\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z} : \ s_n &= n^2 = t_{n-1} + t_n = 2t_{n-1} + n \\ &= \textstyle\int (2\bullet + 1)(n) = 1 + \int (2\bullet - 1)(n+1) \\ &= s_{n-1} + 2n - 1 \\ &= \begin{cases} s_{n-1} - 2\sqrt{s_{n-1}} + 1 = \left(\sqrt{s_{n-1}} - 1\right)^2 & \text{si } n \leqslant 1 \\ s_{n-1} + 2\sqrt{s_{n-1}} + 1 = \left(\sqrt{s_{n-1}} + 1\right)^2 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} : \left| \begin{array}{l} s_{-n} = s_n \\ s_n \in \mathbb{N} \end{array} \right.} \qquad \check{s}_\bullet = s_\bullet$$

n	$\ldots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\ldots$
s_n		25	16	9	4	1	**0**	**1**	4	9	16	25	36	49	64	81	100	

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} : \left| \begin{aligned} \textstyle\int_n^{n+2} s_\bullet &= s_{n+1} + s_n = 2n^2 + 2n + 1 = 2n(n+1) + 1 \\ &= 2n^{\overline{2}} + 1 = 2(n+1)^{\underline{2}} + 1 = 4t_n + 1 \\ \Delta\, s_\bullet(n) &= s_{n+1} - s_n = 2n + 1 = t_{n+1} - t_{n-1} = \Delta\, t_\bullet(n) + n \end{aligned} \right.}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} : \left| \begin{aligned} s_{2n} &= 4n^2 = 4s_n \\ s_{2n+1} &= 8t_n + 1 = 2(s_{n+1} + s_n) - 1 \end{aligned} \right.}$$

visuellement
(pour $n = 2$) 

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}_* : \ 2n+1 \text{ est un nombre carré} \\ \iff \left(\sqrt{2n+1}, \sqrt{s_n}, \sqrt{s_{n+1}}\right) \text{ est un triplet pythagoricien primitif ordonné} \end{array}}$$

4.5 Somme des “(multiples de m) + r” (d’une progression arithmétique)

Somme des n premiers éléments de la progression arithmétique de raison m dont le premier élément est r :

$$\forall m, r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n-1} (im + r) = \textstyle\int(\bullet m + r)(n)$$
$$= r + (m + r) + (2m + r) + (3m + r) + \cdots + [(n-1)m + r]$$

$$\forall m, r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} :$$
$$\textstyle\int(\bullet m + r)(n) = m t_{n-1} + rn = \frac{m}{2} n^2 - \left(\frac{m}{2} - r\right) n = \frac{r + [(n-1)m + r]}{2}\, n$$

5 Opérateurs aux différences finies (calcul finitésimal)

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ et $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\right)^{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}}$: ensembles des nombres entiers, des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ et des opérateurs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ (applications de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$).

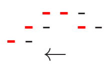
L’application identité $\texttt{id} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto n$ L’opérateur identité $\texttt{Id} : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, $f \longmapsto f$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ et $\texttt{O}, \texttt{P} \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\right)^{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}}$, l’écriture $\texttt{O}f(n)$ est à comprendre comme l’application $\texttt{O}f$ évaluée en n et l’écriture $\texttt{PO}$ comme l’opérateur composé $\texttt{P} \circ \texttt{O}$. Ainsi $\texttt{PO}f(n)$ signifie $[\texttt{P}(\texttt{O}f)]\,(n)$. Voir annexe p. 69 pour quelques notions sur les fonctions.

Dans un contexte d’application d’une seule variable, $\bullet$ exprime cette variable. Par ex., $\bullet$ représente l’application indentité $\texttt{id}$, qui à chaque n associe n.
$\bullet^2 + 1$ représente l’application qui à chaque n associe $n^2 + 1$.

5.1 Opérateur de translation (vers la gauche) : E

$\mathrm{E} : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$
$f \longmapsto \mathrm{E}\,f$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z} : \mathrm{E}\,f(n) = f(n+1)$



Exemple générique :

	...	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	...
$f(n)$		$f(n-2)$	$f(n-1)$	$f(n)$	$f(n+1)$	$f(n+2)$	$f(n+3)$	$f(n+4)$	
$\mathrm{E}\,f(n)$		$f(n-1)$	$f(n)$	$f(n+1)$	$f(n+2)$	$f(n+3)$	$f(n+4)$	$f(n+5)$	

Translation de k unités vers la gauche (de $-k$ vers la droite si $k < 0$) :

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \forall k, n \in \mathbb{Z} : \mathrm{E}^k\, f(n) = f(n+k) = \mathrm{E}^n\, f(k)$$

$\mathrm{E}^k\, f(-k) = f(0)$
$\mathrm{E}^k\, f(0) = f(k)$ $f = \mathrm{E}^{\bullet}\, f(0)$
$\mathrm{E}^k\, f(k) = f(2k)$

Linéarité de l’opérateur E :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \mathrm{E}(\alpha.f + \beta.g) = \alpha.\mathrm{E}\,f + \beta.\mathrm{E}\,g$$

Translation d’un produit :

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \mathrm{E}(f.g) = (\mathrm{E}\,f).\mathrm{E}\,g$$

Translation d’un quotient :

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : 0 \notin g(\mathbb{Z}) \implies \mathrm{E}\,\frac{f}{g} = \frac{\mathrm{E}\,f}{\mathrm{E}\,g}$$

5.2 Opérateur de différence (progressive) : Δ

$\Delta := \mathrm{E} - \mathtt{Id}$

$\Delta : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \overset{\not\hookleftarrow}{\longrightarrow} \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$
$f \longmapsto \mathrm{E}\, f - f$ c.-à-d. $\forall n \in \mathbb{Z} : \Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = \frac{f(n+1)-f(n)}{1}$

C'est l'analogue de la dérivation $\frac{d}{dx}$ du calcul infinitésimal. Mais contrairement au calcul infinitésimal l'opérateur Δ est **partout défini**.

$$\boxed{\text{L'opérateur restreint } \Delta\big|_{\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \,|\, f(0)=\mathbf{0}\}} \text{ est bijectif}}$$

Exemple générique :

	...	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	...
$f(n)$		$f(n-2)$	$f(n-1)$	$f(n)$	$f(n+1)$	$f(n+2)$	
$\Delta f(n)$		$f(n-1)-f(n-2)$	$f(n)-f(n-1)$	$f(n+1)-f(n)$	$f(n+2)-f(n+1)$	$f(n+3)-f(n+2)$	

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \forall n \in \mathbb{Z} : \left| \; f(n+1) \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} f(n) \iff \Delta f(n) \begin{array}{c} < \\ = \\ > \end{array} 0 \right.$$

strictement décroissante
constante
strictement croissante

Linéarité de l'opérateur Δ :

$$\boxed{\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ \Delta(\alpha.f + \beta.g) = \alpha.\Delta f + \beta.\Delta g}$$

Différence d'un produit :

$$\begin{aligned} \forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ \Delta(f.g) &= (\Delta f).g + f.\Delta g + (\Delta f).\Delta g \\ &= (\Delta f).\mathrm{E}\, g + f.\Delta g = (\Delta f).g + (\mathrm{E}\, f).\Delta g \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ (\Delta f).g - f.\Delta g = (\mathrm{E}\, f).g - f.\mathrm{E}\, g}$$

Différence d'un quotient :

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ 0 \notin g(\mathbb{Z}) \implies \left| \begin{array}{l} \Delta \frac{1}{g} = -\frac{\Delta g}{g.\mathrm{E}\, g} \\ \Delta \frac{f}{g} = \frac{(\Delta f).g - f.\Delta g}{g.\mathrm{E}\, g} = \frac{(\mathrm{E}\, f).g - f.\mathrm{E}\, g}{g.\mathrm{E}\, g} \end{array} \right.$$

Différences succesives = "sommes binomiales alternées" :

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \mathrm{E}^2 - 2.\mathrm{E} + \mathtt{Id} = \mathrm{E}\Delta - \Delta \\ \Delta^3 &= \mathrm{E}^3 - 3.\mathrm{E}^2 + 3.\mathrm{E} - \mathtt{Id} = \mathrm{E}^2\Delta - 2.\mathrm{E}\Delta + \Delta \\ \forall k \in \mathbb{N} : \Delta^k &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \mathrm{E}^{k-i} \overset{(k>0)}{=} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} \mathrm{E}^{k-1-i} \Delta \\ &= (-1)^k \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \mathrm{E}^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ \Delta^k f(0) &= (-1)^k \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} f(i) \\ &= (-1)^k \textstyle\int \left[(-1)^{\bullet} \binom{k}{\bullet} f(\bullet) \right] (k+1) \end{aligned}$$

Translation de la diff. = diff. d'une translation (E et Δ commutent) :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Delta &= \Delta\mathrm{E} = \Delta + \Delta^2 = \mathrm{E}^2 - \mathrm{E} \\ \mathrm{E}^{-1}\Delta &= \Delta\mathrm{E}^{-1} = \Delta - \mathrm{E}^{-1}\Delta^2 = \mathtt{Id} - \mathrm{E}^{-1} \end{aligned}$$

$\Delta f(n+1) = f(n+2) - f(n+1)$
$\Delta f(n-1) = f(n) - f(n-1)$

$\forall k \in \mathbb{Z}:\ \Delta_k := E^k - \mathtt{Id}$ $\qquad\qquad$ $\Delta_k\, f(n) = f(n+k) - f(n)$

$$\forall k \in \mathbb{N}: \left| \begin{aligned} E^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i \\ \Delta_k &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i \\ \Delta^k &= (-1)^k \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \Delta_i \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \forall n \in \mathbb{Z}:\ E^k\, f(n) = \int\left[\binom{k}{\bullet}\, \Delta^\bullet\, f(n)\right](k+1)}$$

5.3 Opérateur de sommation (progressive) : $\int$

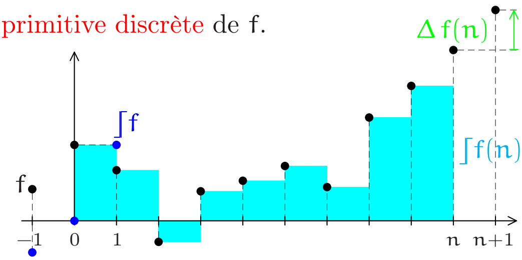
$$\begin{aligned} \int : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \\ f &\longmapsto F \ \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{Z}:\ F(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(i) & \text{si } 0 \leqslant n \\ \displaystyle-\sum_{i=n}^{-1} f(i) & \text{si } n \leqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

C'est l'analogue de l'intégration $\int\ dx$ du calcul infinitésimal. À ceci près que $\int\ dx$ associe à une fonction *intégrable* f l'*ensemble* des fonctions F égalent à une constante près. C'est aussi l'habitude pour l'opérateur de sommation, néanmoins je préfère le poser comme la somme ci-dessus. Donc cet opérateur $\int$ est **partout défini** et associe à l'application f l'**unique** application F s'annulant en 0 telle que $\Delta\, F = f$.

L'application $\int f$ est appelée la primitive discrète de f.

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}: \left| \begin{aligned} \int f(-1) &= -f(-1) \\ \int f(0) &= \mathbf{0} \\ \int f(1) &= f(0) \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{\int\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\right) = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \mid f(0) = \mathbf{0} \right\}}$$



Exemple générique :

n	...	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(n)$		$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	
$\int f(n)$		$-f(-2)-f(-1)$	$-f(-1)$	$\mathbf{0}$	$f(0)$	$f(0)+f(1)$	$f(0)+f(1)+f(2)$	

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \forall n \in \mathbb{Z}: \left| \int f(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(i) = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) & \text{si } 0 \leqslant n \\ \displaystyle-\sum_{i=n}^{-1} f(i) = -f(n) - \cdots - f(-3) - f(-2) - f(-1) & \text{si } n \leqslant 0 \end{cases} \right.$$

Linéarité de l'opérateur $\int$:

$$\boxed{\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}:\ \int(\alpha.f + \beta.g) = \alpha.\int f\ +\ \beta.\int g}$$

Somme d'un produit :

$$\boxed{\forall f,g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} :\ \textstyle\int (f.g) = f.\int g \ - \ \int[(\Delta f).\, E \int g]}$$

Règle de sommation par parties :

$$\boxed{\forall f,g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} :\ \textstyle\int (f.\,\Delta g) = f.g \ - \ \int[(\Delta f).\, E\, g] \ - \ (f.g)(0)}$$

? **Sommation d'un quotient :** ?

$$\forall f,g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} :\ 0 \notin g(\mathbb{Z}) \implies \left| \begin{array}{l} \int(\frac{1}{g}) = \\ \int(\frac{f}{g}) = \end{array}\right.$$

Translation de la sommation :

$$\begin{array}{rl} E\int & = \int + \mathtt{Id} \\ E^{-1}\int & = \int - E^{-1} \\ \forall k \in \mathbb{Z}, \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : E^k \int f & = \int f \ + \ \int E^{\bullet} f(k) = \int f \ + \ \int_{\bullet}^{\bullet+k} f \end{array}$$

$\int f(n+1) = \int f(n) + f(n)$

$\int f(n-1) = \int f(n) - f(n-1)$

Sommation d'une translation :

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \left| \begin{array}{rl} \int E f & = E\int f \ - \ f(0) = \int f \ + \ f \ - \ f(0) \\ \int E^{-1} f & = E^{-1} \int f \ + \ f(-1) = \int f \ - \ E^{-1} f \ + \ f(-1) \\ \forall k \in \mathbb{Z} : \int E^k f & = E^k \int f \ - \ \int f(k) = \int_k^{\bullet+k} f \\ \forall k \in \mathbb{Z}, \forall l \in \mathbb{N} : \int^l E^k f & = E^k \int^l f \ - \ \sum_{i=0}^{l-1} \left[\int^{l-i} f(k)\right] . \frac{\bullet^{\underline{i}}}{i!} \end{array}\right.$$

Translation de la sommation d'une translation :

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \left| \begin{array}{rl} E\int E f & = E^2 \int f \ - \ f(0) \\ E^{-1}\int E^{-1} f & = E^{-2} \int f \ + \ f(-1) \\ \forall k \in \mathbb{Z} : E^k \int E^k f & = E^{2k} \int f \ - \ \int f(k) \\ E^{-1} \int E f & = \int f \ - \ f(0) \quad = \int_1^{\bullet} f \\ E \int E^{-1} f & = \int f \ + \ f(-1) = \int_{-1}^{\bullet} f \\ \forall k \in \mathbb{Z} : E^{-k} \int E^k f & = \int f \ - \ \int f(k) \ = \int_k^{\bullet} f \end{array}\right.$$

Sommation de la translation de la sommation :

$$\boxed{\textstyle\int E \int = E \int^2 = \int^2 + \int}$$

Les opérateurs Δ et $\int$ sont "réciproques" l'un de l'autre :

$$\begin{array}{l} \Delta \int = \mathtt{Id} \\ \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} :\ \int \Delta f = f - f(0) \\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} :\ \int^k \Delta^k f = f - \sum_{i=0}^{k-1} \left[\Delta^i f(0)\right] . \frac{\bullet^{\underline{i}}}{i!} \end{array}$$

($\Rightarrow$ surjectivité de Δ)

$\int^2 \Delta^2 f$
$= f - [\Delta f(0)] \,.\, \mathtt{id} - f(0)$

Démonstration

$\Delta \int = E \int - \int = \cancel{\int} + \mathtt{Id} - \cancel{\int}$

$\int \Delta f = \int (E f \ - \ f) = \int E f \ - \ \int f = \cancel{\int f} \ + \ f \ - \ f(0) \ - \ \cancel{\int f}$ $\square$

5.4 Opérateur de sommation (progressive) définie : $\int_{\cdot}^{\cdot}$

$$\int_{\cdot}^{\cdot} : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\neq\ \neq} \mathbb{R}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$$
$$f \longmapsto F \text{ telle que } \forall a, b \in \mathbb{Z} : \ F(a,b) = \begin{cases} \sum_{i=a}^{b-1} f(i) & \text{si } a \leqslant b \\ -\sum_{i=b}^{a-1} f(i) & \text{si } a \geqslant b \end{cases}$$

Exemple générique :

b	...	$a-2$	$a-1$	a	$a+1$	$a+2$	$a+3$	...
$f(a)$		$f(a-2)$	$f(a-1)$	$f(a)$	$f(a+1)$	$f(a+2)$	$f(a+3)$	
$\int_a^b f$		$-f(a-2)-f(a-1)$	$-f(a-1)$	0	$f(a)$	$f(a)+f(a+1)$	$f(a)+f(a+1)+f(a+2)$	

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \forall a, b \in \mathbb{Z} :$$
$$\int_a^b f = \begin{cases} \sum_{i=a}^{b-1} f(i) = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \cdots + f(b-1) & \text{si } a \leqslant b \\ -\sum_{i=b}^{a-1} f(i) = -f(b) - \cdots - f(a-3) - f(a-2) - f(a-1) & \text{si } b \leqslant a \end{cases}$$

$$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \forall a, b \in \mathbb{Z} : \ \int_a^b f = -\int_b^a f}$$

$$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \forall a, b \in \mathbb{Z} : \ \int_a^b f = \mathrm{E}^{-a} \int \mathrm{E}^{a} f(b) = -\mathrm{E}^{-b} \int \mathrm{E}^{b} f(a)}$$

$$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \forall a \in \mathbb{Z} : \left| \begin{array}{l} \int_a^a f = 0 \\ \int_a^{a+1} f = f(a) = -\int_{a+1}^a f \end{array} \right.}$$

$$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ \int_0^{\bullet} f = \int f = -\int_{\bullet}^0 f}$$

Théorème "fondamental" du calcul aux différences finies :

$$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \forall a, b \in \mathbb{Z} : \ \int_a^b f = \int f(b) - \int f(a)}$$

Démonstration

Si $0 \leqslant a \leqslant b : \int f(b) - \int f(a) = \sum_{i=0}^{b-1} f(i) - \sum_{i=0}^{a-1} f(i) = \sum_{i=a}^{b-1} f(i) = \int_a^b f$

Si $a \leqslant 0 \leqslant b : \int f(b) - \int f(a) = \sum_{i=0}^{b-1} f(i) + \sum_{i=a}^{-1} f(i) = \sum_{i=a}^{b-1} f(i) = \int_a^b f$

Si $a \leqslant b \leqslant 0 : \int f(b) - \int f(a) = -\sum_{i=b}^{-1} f(i) + \sum_{i=a}^{-1} f(i) = \sum_{i=a}^{b-1} f(i) = \int_a^b f$

Si $a > b : \int_a^b f = -\int_b^a f = -[\int f(a) - \int f(b)] = \int f(b) - \int f(a)$ □

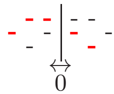
Relation de Chasles :

$$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \forall a, b, c \in \mathbb{Z} : \ \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f}$$

Linéarité de l'opérateur $\int_{\cdot}^{\cdot}$:

$$\boxed{\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \forall a, b \in \mathbb{Z} : \int_a^b (\alpha.f + \beta.g) = \alpha \int_a^b f \ + \ \beta \int_a^b g}$$

5.5 Opérateur de réflexion (symétrie horizontale) : $\check{\ }$



$$\begin{array}{rcl} \check{\ } : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \\ f & \longmapsto & \check{f} \quad \text{telle que } \forall n \in \mathbb{Z} : \ \check{f}(n) = f(-n) \end{array}$$

Exemple générique :

	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$f(n)$		$f(-4)$	$f(-3)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	
$\check{f}(n)$		$f(4)$	$f(3)$	$f(2)$	$f(1)$	$f(0)$	$f(-1)$	$f(-2)$	$f(-3)$	$f(-4)$	

$$\boxed{\begin{array}{l} \check{\ }^{-1} = \check{\ } \\ \check{\ }^{2} = \mathtt{Id} \end{array}} \qquad \boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ \check{f}(0) = f(0)}$$

$$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \left| \begin{array}{lcl} f \text{ est paire} & \Longleftrightarrow & \check{f} = f \\ f \text{ est impaire} & \Longleftrightarrow & \check{f} = -f \end{array} \right.}$$

Linéarité de l'opérateur $\check{\ }$:

$$\boxed{\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ \check{\ }(\alpha.f + \beta.g) = \alpha.\check{f} \ + \ \beta.\check{g}}$$

Réflexion d'un produit :

$$\boxed{\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ \check{\ }(f.g) = \check{f}.\check{g}}$$

Réflexion d'un quotient :

$$\boxed{\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ 0 \notin g(\mathbb{Z}) \ \Longrightarrow \ \check{\ }\frac{f}{g} = \frac{\check{f}}{\check{g}}}$$

Translation de la réflexion d'une translation :

$$\boxed{E \, \check{\ } \, E = \check{\ } = E^{-1} \, \check{\ } \, E^{-1}}$$

Réflexion d'une translation et translation de la réflexion :

$$\boxed{\begin{array}{l} \check{\ } E = E^{-1} \, \check{\ } \\ E \, \check{\ } = \check{\ } E^{-1} \end{array}} \qquad \begin{array}{r} \check{\ } E \, f(n) = f(-n+1) \\ E \, \check{f}(n) = f(-n-1) \end{array}$$

Réflexion de la différence et différence de la réflexion :

$$\boxed{\begin{array}{l} \check{\ } \Delta = -\Delta \, \check{\ } E = -E^{-1} \, \Delta \, \check{\ } \\ \Delta \, \check{\ } = -E \, \check{\ } \Delta = -\check{\ } \Delta \, E^{-1} \end{array}} \qquad \begin{array}{r} \check{\ } \Delta \, f(n) = f(-n+1) - f(-n) \\ \Delta \, \check{f}(n) = f(-n-1) - f(-n) \end{array}$$

Réflexion de la sommation et sommation de la réflexion :

$$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \left| \begin{array}{lcl} \check{\ } \int f & = & -E \int \check{f} \ + f(0) \\ \int \check{f} & = & -\check{\ } E \int f + f(0) \end{array} \right.}$$

5.6 Fonctions particulières

Applications constantes entre-elles :

$$\boxed{\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \left| \begin{array}{l} f = g \iff E\, f = E\, g \iff \int f = \int g \iff \check{f} = \check{g} \\ f \text{ et } g \text{ égales à une constante près} \iff \Delta f = \Delta g \\ \qquad \iff E(f-g) = f - g \iff \Delta(f-g) = 0 \end{array} \right.}$$

(injectivité de E, $\int$ et $\check{\ }$)

Applications constantes :

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \left| \begin{array}{l} f = 0 \iff \mathrm{E}\, f = 0 \iff \left| \begin{array}{l} \Delta\, f = 0 \\ 0 \in f(\mathbb{Z}) \end{array} \right| \iff \int f = 0 \iff \check{f} = 0 \\[1ex] f \text{ est constante} \iff \mathrm{E}\, f = \mathbf{f} \iff \Delta\, f = 0 \\ \qquad\qquad \iff \int f = f(0).\,\mathrm{id} \iff \exists K \in \mathbb{Z} : \int f = f(K).\,\mathrm{id} \\ \qquad\qquad \iff \mathrm{E}\, f \text{ est constante} \iff \check{f} \text{ est constante} \\ \qquad\qquad \implies \check{f} = \mathbf{f} \end{array} \right.$$

Applications périodiques :

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \forall k \in \mathbb{Z} : \ f \text{ est } |k|\text{-périodique} \iff \forall n \in \mathbb{Z} : \ f(n+k) = f(n)$$
$$\iff \mathrm{E}^{k}\, f = \mathbf{f} \iff \Delta_{k}\, f = 0$$

Applications s'annulant en 0 :

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ f(0) = \mathbf{0} \iff \mathrm{E} \int f = \int \mathrm{E}\, f \iff \Delta \int f = \int \Delta\, f$$
$$\iff \check{\ } \int f = -\mathrm{E} \int \check{f} \iff \int \check{f} = -\check{\ }\mathrm{E} \int f$$

Applications linéaires : $a.\bullet$

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ f \text{ est linéaire} \iff f = f(1).\,\mathrm{id} \iff \left| \begin{array}{l} f \text{ est affine} \\ f(0) = \mathbf{0} \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{l} \Delta^{2}\, f = 0 \\ f(0) = \mathbf{0} \end{array} \right.$$
$$\iff \mathrm{E}\, f = f + f(1) \iff \forall k \in \mathbb{Z} : \ \mathrm{E}^{k}\, f = f + k\, f(1) = f + f(k)$$
$$\iff \Delta\, f = f(1) \iff \left| \begin{array}{l} \mathrm{E}\, f \text{ est affine} \\ f(0) = \mathbf{0} \end{array} \right.$$
$$\implies \left| \begin{array}{l} \check{f} = -f \\ \forall k \in \mathbb{Z}, \forall g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ f(1) \in \mathbb{Z} \implies \mathrm{E}^{k}(g \circ f) = \left[\mathrm{E}^{f(k)}\, g\right] \circ f \\ \forall g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ f(1) \in \mathbb{Z} \implies \Delta(g \circ f) = (\Delta_{f(1)}\, g) \circ f \end{array} \right.$$

Applications affines : $a.\bullet + b$

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \ f \text{ est affine} \iff f = [\Delta\, f(0)]\,.\,\mathrm{id} + f(0) \iff \mathrm{E}\, f \text{ est affine}$$
$$\iff \mathrm{E}\, f = f + \Delta\, f(0) \iff \Delta\, f = \Delta\, f(0)$$
$$\iff \left[\forall k \in \mathbb{Z} : \mathrm{E}^{k}\, f = f + k\, \Delta\, f(0)\right] \iff \Delta^{2}\, f = 0$$

Différence et sommation de l'application identité : $\bullet$

$$\Delta\, \mathrm{id} = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{Z} : \int \mathrm{id}(n) = \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \frac{(n-1)^{\overline{2}}}{2} = \frac{(n-1)n}{2} = t_{n-1} = t_{-n} \overset{(n \geqslant 0)}{=} \binom{n}{2}$$

Différence des applications puissances : $\bullet^{k}, \bullet^{\overline{k}}, \bullet^{\underline{k}}$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z} :$$
$$\left| \begin{array}{l} \Delta \bullet^{k}(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} n^{i} = \int \left[\binom{k}{\bullet} n^{\bullet}\right](k) = \int \left[\frac{k^{\underline{\bullet}}}{\bullet !} n^{\bullet}\right](k) \\[2ex] \Delta \bullet^{\overline{k}}(n) = \begin{cases} k(n+1)^{\overline{k-1}} & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \\[2ex] \Delta \bullet^{\underline{k}}(n) = \begin{cases} k n^{\underline{k-1}} & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} :$$
$$\left| \begin{array}{l} \Delta \bullet^{2}(n) = 2n + 1 \\ \Delta \bullet^{\overline{2}}(n) = 2(n+1) \\ \Delta \bullet^{\underline{2}}(n) = 2n \end{array} \right.$$

Démonstration

$$\Delta \bullet^{\underline{k}}(n) = (n+1)^{\underline{k}} - n^{\underline{k}} = (n+1)n^{\underline{k-1}} - n^{\underline{k-1}}(n-k+1)$$
$$= (\cancel{n}+\cancel{1}-\cancel{n}+k-\cancel{1})n^{\underline{k-1}} = kn^{\underline{k-1}} \qquad \square$$

Sommation des applications puissances :

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z} :$

$$\begin{aligned}
\int \bullet^{k}(n) &\overset{(n\geq 0)}{=} \frac{n}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i n^{k-i}\\
&\overset{(n\geq 0)}{=} \frac{n}{k+1}\int\left[\binom{k+1}{\bullet}B_\bullet n^{k-\bullet}\right](k+1)\\
\int \bullet^{\overline{k}}(n) &= \begin{cases}\frac{(n-1)^{\overline{k+1}}}{k+1} & \text{si } k>0\\ n & \text{si } k=0\end{cases}\\
\int \bullet^{\underline{k}}(n) &= \frac{n^{\underline{k+1}}}{k+1} \overset{(n\geq 0)}{=} \binom{n}{k+1}
\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{Z} :$

$$\begin{aligned}
\int \bullet^{2}(n) &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\
&= P_{n-1}\\
\int \bullet^{\overline{2}}(n) &= \frac{(n-1)^{\overline{3}}}{3}\\
\int \bullet^{\underline{2}}(n) &= \frac{n^{\underline{3}}}{3}
\end{aligned}$$

Démonstration

Cf. formule de FAULHABER p. 42.

Comme $\Delta \bullet^{\underline{k+1}}(n) = (k+1)n^{\underline{k}}$:

$$n^{\underline{k+1}} - 0^{\underline{k+1}} = \int \Delta \bullet^{\underline{k+1}}(n) = \int\left[(k+1)\bullet^{\underline{k}}\right](n) = (k+1)\int\bullet^{\underline{k}}(n) \qquad \square$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z} : \int^{k} 1(n) = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \overset{(n\geq 0)}{=} \binom{n}{k}$$

$\forall k, n \in \mathbb{N} :$
$$\Delta \binom{\bullet}{k}(n) = \binom{n}{k-1}$$
$$\int \binom{\bullet}{k}(n) = \binom{n}{k+1}$$

? $\forall k, n \in \mathbb{N} :$?
$$\Delta \left\{{\bullet \atop k}\right\}(n) = \left\{{n \atop k-1}\right\} + (k-1)\left\{{n \atop k}\right\}$$
$$\int \left\{{\bullet \atop k}\right\}(n) =$$

Différence et sommation des applications polynomiales : $\sum_{i=0}^{k} a_i \bullet^{i}$

$\forall f \in \mathbb{R}[n] :$
$$\deg \Delta f = (\deg f) - 1 \iff \deg f \neq 0$$ [6]
$$\deg \int f = (\deg f) + 1$$

? **Différence des fonctions exponentielles** : $x^{\bullet}, x^{\overline{\bullet}}, x^{\underline{\bullet}}$?

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N} :$

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\bullet}(k) &= (x-1)x^{k}\\
\Delta x^{\overline{\bullet}}(k) &= (x-1+k)x^{\overline{k}}\\
\Delta x^{\underline{\bullet}}(k) &= (x-1-k)x^{\underline{k}}
\end{aligned}$$

$$\Delta 2^{\bullet} = 2^{\bullet}$$

$\forall k \in \mathbb{Z} :$

$$\begin{aligned}
\Delta 2^{\bullet}(k) &= 2^{k}\\
\Delta 2^{\overline{\bullet}}(k) &\overset{(k\geq 0)}{=} (1+k)2^{\overline{k}}\\
\Delta 2^{\underline{\bullet}}(k) &\overset{(k\geq 0)}{=} (1-k)2^{\underline{k}}
\end{aligned}$$

6. $\forall f \in \mathbb{R}[n] :$ $\deg f$:= degré du polynôme f
$:= \begin{cases}\text{plus grand } k \text{ tel que le coefficient } a_k \text{ soit non nul} & \text{si } f \neq 0\\ -\infty & \text{si } f = 0\end{cases}$

? **Sommation des fonctions exponentielles :** ?

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} \int x^{\bullet}(k) = \begin{cases} \frac{x^k - 1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases} \\ \int x^{\overline{\bullet}}(k) = \\ \int x^{\underline{\bullet}}(k) = \end{array} \right.$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \left| \begin{array}{l} \int 2^{\bullet}(k) = 2^k - 1 \overset{(k \geq 0)}{=} M_k \\ \int 2^{\overline{\bullet}}(k) = \\ \int 2^{\underline{\bullet}}(k) = \end{array} \right.$$

Démonstration
Cf. la somme d'une progression géométrique p. 44 □

? $\forall n, k \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} \Delta \binom{n}{\bullet}(k) = \frac{n-2k-1}{k+1}\binom{n}{k} \\ \int \binom{n}{\bullet}(k) = \end{array} \right.$?

? $\forall n, k \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} \Delta \left\{ {n \atop \bullet} \right\}(k) = \left\{ {n-1 \atop k} \right\} - \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \\ \int \left\{ {n \atop \bullet} \right\}(k) = \end{array} \right.$?

? $\forall k \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} \Delta \bullet!\,(k) = k\,k! \\ \int \bullet!\,(k) = \end{array} \right.$?

? **Différence des nombres harmoniques :** $H_n = \int \frac{1}{\bullet + 1}(n)$?

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ \Delta H_{\bullet}(n) = \frac{1}{n+1}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_*, \forall n \in \mathbb{N} : \ \Delta^k H_{\bullet}(n) = -(-1)^k \frac{(k-1)!}{(n+1)^{\overline{k}}} = -(-1)^k (k-1)!\, n^{\underline{-k}}$$

5.7 Points fixes des opérateurs

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \left| \begin{array}{l} E\,f = \mathbf{f} \iff f \text{ est constante} \iff \Delta f = 0 \\ \Delta f = \mathbf{f} \iff f = f(0).2^{\bullet} \iff (\exists K \in \mathbb{R} : f = K.2^{\bullet}) \iff E\,f = 2f \\ \int f = \mathbf{f} \iff f = 0 \iff \left| \begin{array}{l} E\,f = \mathbf{f} \\ \Delta f = \mathbf{f} \end{array} \right. \\ \check{f} = \mathbf{f} \iff f \text{ est paire} \end{array} \right.$$

5.8 Nombres de Fibonacci : F_n

$$F_0 := \mathbf{0}$$
$$F_1 := \mathbf{1}$$
$$\forall n \in \mathbb{Z} : F_n := F_{n-2} + F_{n-1}$$

[OEIS, A000045]

Le nombre d'or :

$$\phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\,033\,988\ldots = \phi^2 - 1 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

$$\check{\phi} := \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618\,033\,988\ldots = \check{\phi}^2 - 1 = 1 - \phi = -{}^{1}\!/_{\phi} = \lim_{n\to-\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} :\; F_n = \frac{\phi^n - \check{\phi}^n}{\sqrt{5}} \overset{(n\geqslant 0)}{=} \left\lfloor \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + 0,5 \right\rfloor}$$

n	$\ldots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\ldots$
$\int F_n$		-4	1	-2	0	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$	0	1	2	$\mathbf{4}$	7	12	20	33	54	88	143	232	376	609	
F_n		5	-3	2	-1	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	1	2	3	$\mathbf{5}$	8	13	21	34	55	89	144	233	377	
ΔF_n		-8	5	$\mathbf{-3}$	2	$\mathbf{-1}$	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	

$$\boxed{\begin{aligned} &E\,F_\bullet = E^{-1}\,F_\bullet \;+\; F_\bullet \\ &\Delta\,F_\bullet = E^{-1}\,F_\bullet \\ &\int F_\bullet = E\,F_\bullet \;-\; 1 \\ &\check{F}_\bullet = -(-1)^\bullet\,F_\bullet \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} &F_{n+1} = F_{n-1} \;+\; F_n \\ &F_{n+1} \;-\; F_n = F_{n-1} \\ &\int F_\bullet(n) = F_{n+1} \;-\; 1 \\ &F_{-n} = -(-1)^n\,F_n \end{aligned}$$

$f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ est appelée application de FIBONACCI si elle vérifie la récurrence :

$f = E^{-2}\,f \;+\; E^{-1}\,f$ c.-à-d. si $\forall n \in \mathbb{Z} :\; f(n) = f(n-2) + f(n-1)$

Combinaisons linéaires d'applications de FIBONACCI :

$$\boxed{\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : f \text{ et } g \text{ sont de FIBONACCI} \iff \left|\begin{array}{l} f+g \text{ est de FIBONACCI} \\ f \text{ ou } g \text{ est de FIBONACCI} \end{array}\right.}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} :\; f \text{ est de FIBONACCI} &\iff \forall \alpha \in \mathbb{R} :\; \alpha.f \text{ est de FIBONACCI} \\ &\iff E\,f \text{ est de FIBONACCI} \\ &\implies \left|\begin{array}{l} \Delta\,f \text{ est de FIBONACCI} \\ \int f \textit{ n'est pas } \text{de FIBONACCI} \end{array}\right. \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \\ &f \text{ est de FIBONACCI} \\ &\Leftrightarrow f = f(0).\,E^{-1}\,F_\bullet \;+\; f(1).\,F_\bullet \\ &\Leftrightarrow f = f(0).\,\Delta\,F_\bullet \;+\; f(1).\,F_\bullet \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z} : E^k\,f = f(k).\,E^{-1}\,F_\bullet \;+\; f(k+1).\,F_\bullet \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z} : E^k\,f = f.\,F_{k-1} \;+\; (E\,f).\,F_k \\ &\Leftrightarrow \Delta\,f = E^{-1}\,f \iff \forall k \in \mathbb{N} :\; \Delta^k\,f = E^{-k}\,f \\ &\Leftrightarrow \Delta_2\,f = E\,f \iff \forall k \in \mathbb{N} :\; \Delta_2^k\,f = E^k\,f \\ &\Leftrightarrow \int f = E\,f \;-\; f(1) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} &f(n) = f(0).\,F_{n-1} \;+\; f(1).\,F_n \\ &F_{n+k} = F_k\,.\,F_{n-1} \;+\; F_{k+1}\,.\,F_n \\ &f(n+k) = f(k).\,F_{n-1} \;+\; f(k+1).\,F_n \\ & = f(n).\,F_{k-1} \;+\; f(n+1).\,F_k \\ &\Delta^k\,f(n) = E^{-k}\,f(n) = f(n-k) \\ &\Delta_2^k\,f(n) = E^k\,f(n) \;\;= f(n+k) \\ &\int f(n) = f(n+1) \;-\; f(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2n) &= f(n).\,F_{n-1} + f(n+1).\,F_n \\ f(2n+1) &= f(n).\,F_n \;\;\;+ f(n+1).\,F_{n+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \text{ de Fibonacci : } \check{f} = (-1)^{\bullet}\,[f(0).\,\mathrm{E}\,F_{\bullet} \;-\; f(1).\,F_{\bullet}]}$$

$$\begin{aligned} f(-n) &= (-1)^{n}\,[f(0).\,F_{n+1} \;-\; f(1).\,F_{n}] \\ &= (-1)^{n}\,[f(0).\,F_{n-1} \;-\; f(-1).\,F_{n}] \end{aligned}$$

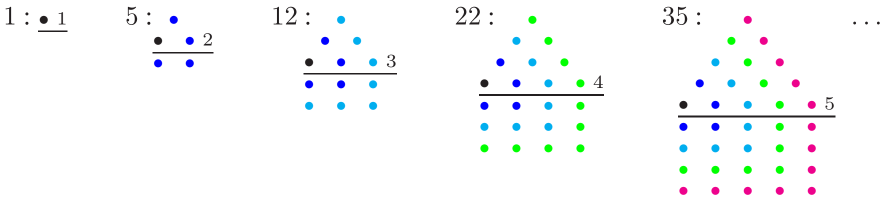
$$\boxed{\begin{array}{l} \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \text{ de Fibonacci :} \\ \quad \left| \begin{array}{lll} f = 0 & \iff & f \text{ est constante} \\ f(0) = \mathbf{0} & \iff & f = f(1).\,F_{\bullet} \iff f.\,\mathrm{E}\,F = (\mathrm{E}\,f).\,F \\ f(1) = 0 & \iff & f = f(0).\,\mathrm{E}^{-1}\,F_{\bullet} = f(0).\,\Delta F_{\bullet} \iff \mathrm{E}\,F = f(0).\,F_{\bullet} \\ f(0) = f(1) & \iff & f = f(0).\,\mathrm{E}\,F_{\bullet} = f(0).\,(1 + \textstyle\int F_{\bullet}) \iff \int f = f(0).\,F_{\bullet} \\ \multicolumn{3}{l}{\forall n \in \mathbb{Z} :\; f(n) = 0 \iff -f(n-2) = f(n-1) = f(n+1) = f(n+2)} \\ \multicolumn{3}{l}{\forall n \in \mathbb{Z}_{*} :\; f(n+1) = \frac{f(n).\,F_{n+1} \;-\; (-1)^{n} f(0)}{F_{n}}} \end{array} \right. \end{array}}$$

? $\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} :\; \int f = \mathrm{E}\,f \implies \left| \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N} :\; \int^{k} f = \mathrm{E}^{k}\,f \\ f(1) = 0 \end{array} \right.}$?

6 Nombres polygonaux : $\mathrm{Poly}_c(n)$

Nombres naturels n, nombres triangulaires t_n, nombres carrés s_n...
Et ensuite ?

Nombres pentagonaux [OEIS, A000326] :

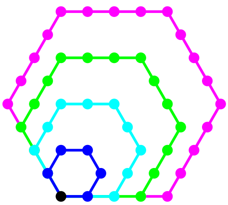


Nombres pentagonaux généralisés :

$$\forall n \in \mathbb{Z} :\; \mathrm{Pent}_n := t_n + 2t_{n-1} = t_n + (n-1)n = t_{n-1} + s_n = t_{n-1} + n^2$$
$$= \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} :\; \mathrm{Pent}_{-n} = \frac{n(3n+1)}{2}}$$

Nombres hexagonaux [OEIS, A000384] :



On constate que pour un “nombre à c côtés”, on passe toujours de l’étape $n-1$ à l’étape n en ajoutant $c-2$ côtés de longueur n. Mais de cette façon il y a $c-3$ sommets qui sont comptabilisés deux fois.
Donc, pour passer de l’étape $n-1$ à l’étape n, il faut ajouter $(c-2)n - (c-3) = (c-2)(n-1) + 1$. [7]

7. Merci à Adrien Sluys pour son dessin éclaircissant.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
t_n	**0**	**1**	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	
s_n	**0**	**1**	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	
Pent_n	**0**	**1**	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210	247	287	
Hexa_n	**0**	**1**	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276	325	378	
...																

$\forall n \in \mathbb{Z}:$

$\Delta\, \mathrm{id}(n) = (n+1) - n = 1$ $\qquad$ $\Delta^2\, \mathrm{id}(n) = 1 - 1 = 0$

$\Delta\, t_\bullet(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = n+1$ $\qquad$ $\Delta^2\, t_\bullet(n) = (n+2)-(n+1) = 1$

$\Delta\, s_\bullet(n) = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ $\qquad$ $\Delta^2\, s_\bullet(n) = (2n+3)-(2n+1) = 2$

$\Delta\, \mathrm{Pent}_\bullet(n) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} - \frac{n(3n-1)}{2} = 3n+1$ $\qquad$ $\Delta^2\, \mathrm{Pent}_\bullet(n) = (3n+4)-(3n+1) = 3$

... $\qquad$ ...

$\Delta\, \mathrm{Poly}_c(n) = (c-2)n + 1 \quad \Leftarrow \quad \Delta^2\, \mathrm{Poly}_c(n) = c-2$

Il s'agit d'identifer les fonctions Poly_c, solutions de l'équation "différentielle" $\Delta^2\, \mathrm{Poly}_c(n) = c-2$ satisfaisant aux bonnes conditions initiales :

$\mathrm{Poly}_c(0) = 0$ et $\mathrm{Poly}_c(1) = 1$ $\qquad$ (donc $\Delta\, \mathrm{Poly}_c(0) = 1$)

$$\textstyle\int^2 \Delta^2\, \mathrm{Poly}_c(n) = \mathrm{Poly}_c(n) - [\Delta\, \mathrm{Poly}_c(0)]\, n - \mathrm{Poly}_c(0) = \mathrm{Poly}_c(n) - n$$
$$= \textstyle\int^2 (c-2)\,(n) = \int[(c-2)\bullet]\,(n) = (c-2)\int \bullet(n) = (c-2)\frac{n^{\underline{2}}}{2}$$

donc les nombres c-gonaux généralisés ("polygones à c côtés" pour les $n \in \mathbb{N}$) :

$\forall c \in \mathbb{N}{+}2, \forall n \in \mathbb{Z}:$ $\mathrm{Poly}_c(n) := (c-2)\frac{n^{\underline{2}}}{2} + n$

$\forall c \in \mathbb{N}{+}2, \forall n \in \mathbb{Z}:$
$$\mathrm{Poly}_c(n) = \left(\tfrac{c}{2} - 1\right) n^2 - \left(\tfrac{c}{2} - 2\right) n = \left[\left(\tfrac{c}{2} - 1\right)(n-1) + 1\right] n$$
$$= (c-2)\frac{n^{\underline{2}}}{2} + n = c\frac{n^{\underline{2}}}{2} - (n-2)n = n^2 + \left(\tfrac{c}{2} - 2\right) n^{\underline{2}}$$

$\forall c \in \mathbb{N}{+}3:$ $\deg \mathrm{Poly}_c = 2$

$\forall c \in \mathbb{N}{+}2, \forall n \in \mathbb{Z}:$ $\mathrm{Poly}_c(-n) = \mathrm{Poly}_c(n) + (c-4)n$
$$= \left(\tfrac{c}{2} - 1\right) n^2 + \left(\tfrac{c}{2} - 2\right) n = n^2 + \left(\tfrac{c}{2} - 2\right) n^{\overline{2}}$$

$\forall c \in \mathbb{N}{+}\mathbf{3}, \forall n \in \mathbb{Z}:$ $\mathrm{Poly}_c(n) \in \mathbb{N}$

$\forall c \in \mathbb{N}{+}2, \forall n \in \mathbb{Z}:$
$$\textstyle\int_n^{n+2} \mathrm{Poly}_c = \mathrm{Poly}_c(n+1) + \mathrm{Poly}_c(n) = (c-2)n^2 + 2n + 1$$
$$= cn^2 - 2n^{\underline{2}} + 1$$
$$\Delta\, \mathrm{Poly}_c(n) = \mathrm{Poly}_c(n+1) - \mathrm{Poly}_c(n) = (c-2)n + 1 = cn - 2n + 1$$
$$\textstyle\int \mathrm{Poly}_c(n) = \left(\tfrac{c}{2} - 1\right) \frac{n^3}{3} - (c-3)\frac{n^2}{2} + \left(c - \tfrac{7}{2}\right) \frac{n}{3} = \left(\tfrac{c}{2} - 1\right) \frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2}$$
$$= c\frac{n^{\underline{3}}}{6} - (2n-7)\frac{n^{\underline{2}}}{6} = \left[\frac{(c-2)(n-2)}{3} + 1\right] \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \mathrm{Pyra}_c(n-1)$$

$$\forall c \in \mathbb{N}{+}2, \forall n \in \mathbb{Z} : \begin{aligned}[t] \Delta\,\mathrm{Poly}_c(n-1) &= \mathrm{Poly}_c(n) - \mathrm{Poly}_c(n-1) \\ &= (c-2)n - (c-3) = c(n-1) - 2n + 3 \end{aligned}$$

$$\forall c \in \mathbb{N}{+}2, \forall n \in \mathbb{Z} : \mathrm{Poly}_c(n+1) = \mathrm{Poly}_c(n) + (c-2)n + 1$$

$$\forall c \in \mathbb{N}{+}2 : \left| \begin{aligned} \mathrm{Poly}_c(-1) &= c - 3 \\ \mathrm{Poly}_c(0) &= \mathbf{0} \\ \mathrm{Poly}_c(1) &= \mathbf{1} \\ \mathrm{Poly}_c(2) &= c \\ \mathrm{Poly}_c(3) &= 3c - 3 \\ \mathrm{Poly}_c(4) &= 6c - 8 \\ \mathrm{Poly}_c(5) &= 10c - 15 \end{aligned} \right.$$

$\forall n \in \mathbb{Z} :$

$\mathrm{Poly}_2(n) = \mathbf{n}$				
$\mathrm{Poly}_3(n) = \frac{n^2+n}{2}$	$= \frac{n(n+1)}{2}$	$= \frac{n^{\overline{2}}}{2} = t_n$		triangulaire
$\mathrm{Poly}_4(n) = n^2$		$= s_n$		carré
$\mathrm{Poly}_5(n) = \frac{3n^2-n}{2}$	$= \frac{n(3n-1)}{2}$	$= \frac{t_{3n-1}}{3}$		pentagonal
$\mathrm{Poly}_6(n) = 2n^2 - n$	$= n(2n-1)$	$= t_{2n-1}$		hexagonal
$\mathrm{Poly}_7(n) = \frac{5n^2-3n}{2}$	$= \frac{n(5n-3)}{2}$			heptagonal [OEIS, A000566]
$\mathrm{Poly}_8(n) = 3n^2 - 2n$	$= n(3n-2)$			octogonal [OEIS, A000567]
$\mathrm{Poly}_9(n) = \frac{7n^2-5n}{2}$	$= \frac{n(7n-5)}{2}$		(nonagonal)	ennéogonal [OEIS, A001106]
$\mathrm{Poly}_{10}(n) = 4n^2 - 3n$	$= n(4n-3)$			décagonal [OEIS, A001107]

$\forall c \in \mathbb{N}{+}2, \forall n \in \mathbb{Z} :$

$$\left| \begin{aligned} \textstyle\int_c^{c+2} \mathrm{Poly}_\bullet(n) &= \mathrm{Poly}_{c+1}(n) + \mathrm{Poly}_c(n) = \left(c - \tfrac{3}{2}\right) n^2 - \left(c - \tfrac{7}{2}\right) n \\ &= \left(c - \tfrac{3}{2}\right) n^{\underline{2}} + 2n \\ &= n\left[\left(c - \tfrac{3}{2}\right)(n-1) + 2\right] \\ \Delta\,\mathrm{Poly}_\bullet(n)\,(c) &= \mathrm{Poly}_{c+1}(n) - \mathrm{Poly}_c(n) = \tfrac{n^2-n}{2} = \tfrac{(n-1)n}{2} = \tfrac{n^{\underline{2}}}{2} = t_{n-1} \\ \textstyle\int \mathrm{Poly}_\bullet(n)\,(c) &= \tfrac{cn}{4}\left[(n-1)c - 2n + 3\right] = \tfrac{cn}{4}\left[(c-2)n - c + 3\right] \\ &= \tfrac{n^{\underline{2}} c^{\underline{2}}}{4} - (n-2)nc \end{aligned} \right.$$

$$\forall c \in \mathbb{N}{+}2, \forall n \in \mathbb{Z} : \mathrm{Poly}_{c+1}(n) = \mathrm{Poly}_c(n) + \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \mathrm{Poly}_c(n) + t_{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}{+}2 : \mathrm{Poly}_n(n) = \frac{n}{2}(n^2 - 3n + 4) = \frac{n^{\underline{3}}}{2} + n$$

$$\mathbb{Z}\,? \quad \boxed{\forall c \in \mathbb{N}+5, \forall n \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \mathrm{Poly}_c(n) = \alpha t_{\beta n+\gamma} \\ \beta n + \gamma \in \mathbb{N} \end{array}\right| \implies \frac{c-2}{c-4} n \in \mathbb{N}_* \\ \\ \frac{c-2}{c-4} n \in \mathbb{N} \implies \mathrm{Poly}_c(n) = \frac{(c-4)^2}{c-2} t_{\frac{c-2}{c-4}n-1} \end{array}\right.} \quad \mathbb{Z}\,?$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{5, 10, 11, 20, 25, 26, 38, 39, 54, 65, 70, 114, 130\}, \exists a, b, c, d \in \mathbb{N} : \\ \quad n = \mathrm{Poly}_6(a) + \mathrm{Poly}_6(b) + \mathrm{Poly}_6(c) + \mathrm{Poly}_6(d) \end{array}}$$

(LEGENDRE, 1830, pour $n > 1791$)

$5, 10, 11, 20, 25, 26, 38, 39, 54, 65, 70, 114, 130 =$ [OEIS, A007527]

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{5, 10, 11, 20, 25, 26, 38, 39, 54, 65, 70, 114, 130\}, \\ \quad \exists a, b, c, d \in 2\mathbb{N}-1 : \ n = t_a + t_b + t_c + t_d \\ \forall n \in \mathbb{N}, \exists a, b, c, d \in \mathbb{N} : \ n = t_a + t_b + t_c + t_d \end{array}}$$

7 Nombres pyramidaux

Une autre façon de généraliser les nombres figurés est d'augmenter le nombre de dimensions. Intéressons-nous aux “pyramides à base de c côtés”. Ce sont les sommes cumulées des nombres c-gonaux.

7.1 Somme des n premiers nombres triangulaires (non nuls) : T_n

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ T_n := \sum_{i=1}^{n} t_i = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n = ?$$

$T_0 = \quad = \mathbf{0}$

$T_1 = 1 \quad = \mathbf{1}$

$T_2 = 1 + 3 \quad = 4$

$T_3 = 1 + 3 + 6 \quad = 10$

Ce sont les nombres tétraédriques (ou pyramidaux triangulaires) [OEIS, A000292] (vus du dessus)

$T_4 = 1 + 3 + 6 + 10 \quad = 20$

$T_5 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$

...

$$3T_4 = \begin{array}{c} 1 \\ 1+2 \\ 1+2+3 \\ 1+2+3+4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ 2+1 \\ 3+2+1 \\ 4+3+2+1 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ 3+3 \\ 2+2+2 \\ 1+1+1+1 \end{array} = \begin{array}{c} 6 \\ 6+6 \\ 6+6+6 \\ 6+6+6+6 \end{array} = 6t_4$$

(rotation de 120°) (rotation de 120°)

donc $T_4 = 2t_4 = 20$

En général, pour chaque k^e ligne ($1 \leqslant k \leqslant n$) : $t_k + t_k + k(n+1-k)$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} + k(n+1-k) = \cancel{k^2} + k + kn + k - \cancel{k^2} = k(n+2)$$

$$\begin{array}{rcl} & & n+2 \\ & & (n+2) \;+\; (n+2) \\ \text{donc } 3T_n & = & (n+2) \;+\; (n+2) \;+\; (n+2) = (n+2)t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{2} \\ & & \ldots \end{array}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} :\ T_n &= \sum_{i=1}^{n} t_i = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n = \textstyle\int t_\bullet(n+1) \\ &= \frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ &= \frac{n t_{n+1}}{3} = \frac{(n+2)t_n}{3} = \frac{n^{\overline{3}}}{6} = \frac{(n+2)^{\underline{3}}}{6} = \binom{n+2}{3} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \left| \begin{aligned} & T_{n+1} + T_n = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = P_{n+1} \\ & T_{n+1} - T_n = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)^{\overline{2}}}{2} = \binom{n+2}{2} = t_{n+1} \\ & T_{n+1} = T_n + t_{n+1} = T_n + \frac{(n+1)^{\overline{2}}}{2} \end{aligned} \right.}$$

7.2 Somme des n premiers carrés (non nuls) : P_n

$\forall n \in \mathbb{N} :\ P_n := \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = ?$

$P_0 = \qquad = \mathbf{0}$

$P_1 = 1 \qquad = \mathbf{1}$

$P_2 = 1 + 4 \qquad = 5$ 

$P_3 = 1 + 4 + 9 \qquad = 14$ 

$P_4 = 1 + 4 + 9 + 16 \qquad = 30$

$P_5 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$

$\ldots$

Ce sont les nombres pyramidaux carrés [OEIS, A000330] (vus du dessus, un élément est caché)

$$\text{Si } n > 0 :\ P_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1} + t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i + \sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$= T_{n-1} + T_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} :\ P_n &= \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \textstyle\int s_\bullet(n+1) \\ &= \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(2n+1)t_n}{3} = T_{n-1} + T_n \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N} : \\ & \left| \begin{aligned} & P_{n+1} + P_n = \frac{2n^3+6n^2+7n+3}{3} = \frac{(n+1)(2n^2+4n+3)}{3} = \frac{(n+1)\left[2(n+1)^2+1\right]}{3} \\ & P_{n+1} - P_n = (n+1)^2 = s_{n+1} = T_{n+1} - T_{n-1} \\ & P_{n+1} = P_n + (n+1)^2 = P_n + s_{n+1} \end{aligned} \right. \end{aligned}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: \; P_{n-1} + P_n = \frac{2n^3+n}{3} = \frac{n(2n^2+1)}{3}}$$

nombre octaédrique (deux pyramides collées sur leur base carrée)
[OEIS, A005900]

Somme des carrés de "(multiples de m) + r"

$$\forall m, r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}:$$
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} (im+r)^2 &= m^2 P_{n-1} + 2mrt_{n-1} + r^2 n \\ &= \left(\tfrac{2m}{3}n - \tfrac{m}{3} + 2r\right) mt_{n-1} + r^2 n \\ &= \tfrac{m^2}{3}n^3 - \left(\tfrac{m}{2} - r\right) mn^2 + \left(\tfrac{m^2}{6} - mr + r^2\right) n\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: \; \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1)^2 = \tfrac{n}{3}(4n^2-1)}$$

7.3 Nombres pyramidaux : $\mathrm{Pyra}_c(n)$

$$\forall c \in \mathbb{N}+2, \forall n \in \mathbb{N}: \; \mathrm{Pyra}_c(n) := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Poly}_c(i) = \textstyle\int \mathrm{Poly}_c\,(n+1)$$

$$\forall c \in \mathbb{N}+2, \forall n \in \mathbb{N}:$$
$$\begin{aligned}\mathrm{Pyra}_c(n) &= \frac{(c-2)n^3 + 3n^2 - (c-5)n}{6} = \frac{n(n+1)[(c-2)(n-1)+3]}{6} \\ &= (c-2)\frac{(n-1)^{\overline{3}}}{6} + \frac{n^{\overline{2}}}{2} = (c-2)\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall c \in \mathbb{N}+3: \; \deg \mathrm{Pyra}_c = 3}$$

$$\forall c \in \mathbb{N}+2, \forall n \in \mathbb{N}:$$
$$\left|\begin{aligned}\textstyle\int_n^{n+2} \mathrm{Pyra}_c &= \mathrm{Pyra}_c(n+1) + \mathrm{Pyra}_c(n) = \tfrac{c-2}{3}n^3 + \tfrac{c}{2}n^2 + \tfrac{c+10}{6}n + 1 \\ \Delta\,\mathrm{Pyra}_c(n) &= \mathrm{Pyra}_c(n+1) - \mathrm{Pyra}_c(n) = \mathrm{Poly}_c(n+1) \\ \textstyle\int \mathrm{Pyra}_c(n) &= \tfrac{n}{24}\left[(c-2)n^3 - 2(c-4)n^2 - (c-2)n + 2c - 8\right] \\ &= (c-2)\frac{(n+1)^{\underline{4}}}{24} + \frac{(n+1)^{\underline{3}}}{6} = (c-2)\binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{3}\end{aligned}\right.$$

$$\boxed{\forall c \in \mathbb{N}+2, \forall n \in \mathbb{N}: \; \mathrm{Pyra}_c(n+1) = \mathrm{Pyra}_c(n) + \mathrm{Poly}_c(n+1)}$$

$$\forall c \in \mathbb{N}+2: \left|\begin{aligned}&\mathrm{Pyra}_c(0) = \mathbf{0} \\ &\mathrm{Pyra}_c(1) = \mathbf{1} \\ &\mathrm{Pyra}_c(2) = c+1 \\ &\mathrm{Pyra}_c(3) = 4c-2 \\ &\mathrm{Pyra}_c(4) = 10c-10 \\ &\mathrm{Pyra}_c(5) = 20c-25\end{aligned}\right.$$

$\forall n \in \mathbb{N}:$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pyra}_2(n) &= \frac{n^2+n}{2} &&= \frac{n(n+1)}{2} &&= \frac{n^{\overline{2}}}{2} = t_n = \mathrm{Poly}_3(n) \\
\mathrm{Pyra}_3(n) &= \frac{n^3+3n^2+2n}{6} &&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} &&= \frac{n^{\overline{3}}}{6} = T_n \quad \text{tétraédrique} \\
\mathrm{Pyra}_4(n) &= \frac{2n^3+3n^2+n}{6} &&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &&= P_n \\
\mathrm{Pyra}_5(n) &= \frac{n^3+n^2}{2} &&= \frac{n^2(n+1)}{2} && \text{[OEIS, A002411]} \\
\mathrm{Pyra}_6(n) &= \frac{4n^3+3n^2-n}{6} &&= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} && \text{[OEIS, A002412]} \\
\mathrm{Pyra}_7(n) &= \frac{5n^3+3n^2-2n}{6} &&= \frac{n(n+1)(5n-2)}{6} && \text{[OEIS, A002413]} \\
\mathrm{Pyra}_8(n) &= \frac{2n^3+n^2-n}{2} &&= \frac{n(n+1)(2n-1)}{2} && \text{[OEIS, A002414]} \\
\mathrm{Pyra}_9(n) &= \frac{7n^3+3n^2-4n}{6} &&= \frac{n(n+1)(7n-4)}{6} && \text{[OEIS, A007584]} \\
\mathrm{Pyra}_{10}(n) &= \frac{8n^3+3n^2-5n}{6} &&= \frac{n(n+1)(8n-5)}{6} && \text{[OEIS, A007585]}
\end{aligned}
$$

$\forall c \in \mathbb{N}+2, \forall n \in \mathbb{N}:$

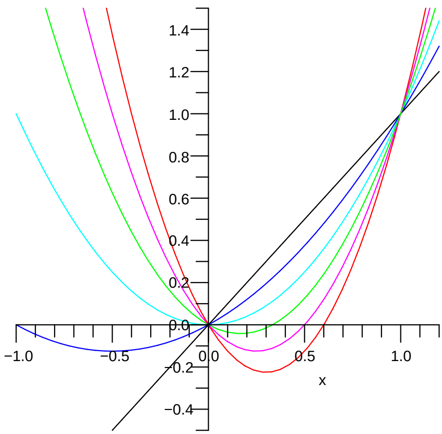
$$
\begin{aligned}
\int_c^{c+2} \mathrm{Pyra}_\bullet(n) &= \mathrm{Pyra}_{c+1}(n) + \mathrm{Pyra}_c(n) = \frac{(2c-3)n^3+6n^2-(c-9)n}{6} \\
\Delta\, \mathrm{Pyra}_\bullet(n)\,(c) &= \mathrm{Pyra}_{c+1}(n) - \mathrm{Pyra}_c(n) = \frac{n^3-n}{6} = \frac{(n-1)^{\overline{3}}}{6} = \binom{n+1}{3} \\
\int \mathrm{Pyra}_\bullet(n)\,(c) &= \frac{(n+1)^{\underline{3}}c^2+n(n+1)(5n+9)c}{12}
\end{aligned}
$$

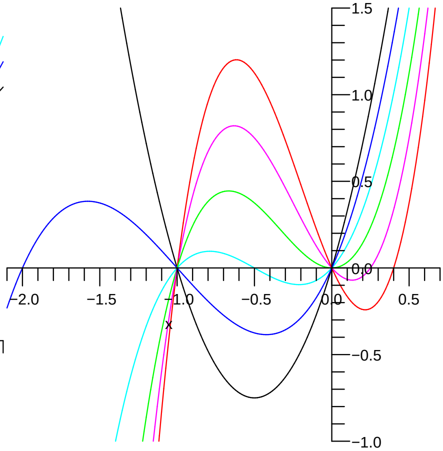
$$\forall c \in \mathbb{N}+2, \forall n \in \mathbb{N}: \mathrm{Pyra}_{c+1}(n) = \mathrm{Pyra}_c(n) + \frac{(n+1)^{\underline{3}}}{6} = \mathrm{Pyra}_c(n) + \binom{n+1}{3}$$

$\forall n \in \mathbb{N}+2:$

$$\mathrm{Pyra}_n(n) = \frac{n^4-2n^3+2n^2+5n}{6} = \frac{(n-2)^{\overline{4}}}{6} + \frac{n^{\overline{2}}}{2} = \frac{(n+1)^{\underline{4}}}{6} + \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2}$$

"$\mathrm{Poly}_c(x)$" et "$\mathrm{Pyra}_c(x)$" avec $c = 2, 3, 4, 5, 6$ et 7 :





8 Somme des puissances k^e

8.1 Somme des n premiers cubes (non nuls) : C_n

$\forall n \in \mathbb{N}:\ C_n := \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = ?$

$$\begin{array}{lll}
C_0 = & = & \mathbf{0} \\
C_1 = 1 & = & \mathbf{1} = 1^2 \\
C_2 = 1 + 8 & = & 9 = (1+2)^2 \\
C_3 = 1 + 8 + 27 & = & 36 = (1+2+3)^2 \\
C_4 = 1 + 8 + 27 + 64 & = & 100 = (1+2+3+4)^2 \\
C_5 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 & = & 225 = (1+2+3+4+5)^2
\end{array}$$

[OEIS, A000537]

...

1	$1 = 1^3$
3 5	$8 = 2^3$
7 9 11	$27 = 3^3$
13 15 17 19	$64 = 4^3$
...	...
s_{t_n} somme des t_n premiers impairs	C_n somme des n premiers cubes

(Nicomaque de Gerasa)

La somme de la k^e ligne $(1 \leqslant k \leqslant n)$

$$= s_{t_k} - s_{t_{k-1}} = \frac{k^2(k+1)^2}{4} - \frac{(k-1)^2k^2}{4} = \frac{k^2\left[(k+1)^2 - (k-1)^2\right]}{4} = \frac{k^2\,4k}{4} = k^3$$

donc $C_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} (s_{t_k} - s_{t_{k-1}})$

$$= \cancel{s_{t_1}} - s_{t_0} + \cancel{s_{t_2}} - \cancel{s_{t_1}} + \cdots + s_{t_n} - \cancel{s_{t_{n-1}}} = s_{t_n}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}:\ C_n &= \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \int \bullet^3(n+1) \qquad = (t_n)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 \\
&\qquad = s_{t_n} = \sum_{i=1}^{t_n} (2i-1)
\end{aligned}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: \left|\ \begin{aligned}
C_{n+1} + C_n &= \frac{n^4 + 4n^3 + 7n^2 + 6n + 2}{2} = \frac{(n+1)^2\left[(n+1)^2 + 1\right]}{2} \\
C_{n+1} - C_n &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 \\
C_{n+1} &= C_n + (n+1)^3
\end{aligned}\right.}$$

Somme des cubes de "(multiples de m) + r"

$\forall m, r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}:$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(im+r)^3 = m^3 C_{n-1} + 3m^2 r P_{n-1} + 3mr^2 t_{n-1} + r^3 n$$
$$= m^3 t_{n-1}^2 + (2mn - m + 3r)mrt_{n-1} + r^3 n$$
$$= \frac{m^3}{4}n^4 - \left(\frac{m}{2} - r\right)m^2 n^3 + \left(\frac{m^2}{2} - 3mr + 3r^2\right)\frac{m}{2}n^2 + \left(\frac{m^2}{2} - \frac{3mr}{2} + r^2\right)rn$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = \sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)^3 = 2n^4 - n^2 = n^2(2n^2-1) = t_{2n^2-1}$$

8.2 Nombres de Bernoulli : B_n

Les nombres de Bernoulli sont définis récursivement par :

$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}: B_k := (B_1 + 1)^{\text{"}k\text{"}} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i$ ou $B'_k := (B'_1 - 1)^{\text{"}k\text{"}} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}B'_i$

(définition utilisée par Conway)

$(\ )^{\text{"}k\text{"}}$ signifie qu'il faut effectuer le développement de la puissance selon le binôme de Newton puis les exposants de B_1 ou B'_1 obtenus deviennent ses indices. Voir Calcul symbolique [8] (Umbral calculus [9]).

$$B_0 = (B_1+1)^{\text{"}0\text{"}} = 1 \qquad = B'_0 = (B'_1-1)^{\text{"}0\text{"}} = 1$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= (B_1+1)^{\text{"}2\text{"}} & = B'_2 &= (B'_1-1)^{\text{"}2\text{"}} \\
&= B_1^{\text{"}0\text{"}} + 2B_1^{\text{"}1\text{"}} + B_1^{\text{"}2\text{"}} & &= B_1'^{\text{"}0\text{"}} - 2B_1'^{\text{"}1\text{"}} + B_1'^{\text{"}2\text{"}} \\
&= 1 + 2B_1 + B_2 & &= 1 - 2B'_1 + B'_2 \\
&\Rightarrow 0 = 1 + 2B_1 & &\Rightarrow 0 = 1 - 2B'_1 \\
&\Rightarrow B_1 = \frac{-1}{2} & &\Rightarrow B'_1 = \frac{1}{2} = -B_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3 &= (B_1+1)^{\text{"}3\text{"}} & = B'_3 &= (B'_1-1)^{\text{"}3\text{"}} \\
&= 1 + 3B_1 + 3B_1^{\text{"}2\text{"}} + B_1^{\text{"}3\text{"}} & &= -1 + 3B'_1 - 3B_1'^{\text{"}2\text{"}} + B_1'^{\text{"}3\text{"}} \\
&= 1 + 3B_1 + 3B_2 + B_3 & &= -1 + 3B'_1 - 3B'_2 + B'_3 \\
&\Rightarrow 0 = 1 - \frac{3}{2} + 3B_2 & &\Rightarrow 0 = -1 + \frac{3}{2} - 3B'_2 \\
&\Rightarrow B_2 = \frac{1}{6} & &\Rightarrow B'_2 = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4 &= (B_1+1)^{\text{"}4\text{"}} & = B'_4 &= (B'_1-1)^{\text{"}4\text{"}} \\
&= 1 + 4B_1 + 6B_1^{\text{"}2\text{"}} + 4B_1^{\text{"}3\text{"}} + B_1^{\text{"}4\text{"}} & &= 1 - 4B'_1 + 6B_1'^{\text{"}2\text{"}} - 4B_1'^{\text{"}3\text{"}} + B_1'^{\text{"}4\text{"}} \\
&= 1 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 + B_4 & &= 1 - 4B'_1 + 6B'_2 - 4B'_3 + B'_4 \\
&\Rightarrow 0 = 1 - 2 + 1 + 4B_3 & &\Rightarrow 0 = 1 - 2 + 1 - 4B'_3 \\
&\Rightarrow B_3 = 0 & &\Rightarrow B'_3 = 0
\end{aligned}$$

8. http://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_symbolique
9. http://en.wikipedia.org/wiki/Umbral_calculus

$$
\begin{aligned}
B_5 &= (B_1+1)^{\text{“}5\text{”}} \\
&= 1+5B_1+10B_2+\cancel{10B_3}+5B_4+B_5 \\
&\Rightarrow 0 = 1-\tfrac{5}{2}+\tfrac{5}{3}+5B_4 \\
&\Rightarrow B_4 = \tfrac{-1}{30}
\end{aligned}
$$

$\ldots$

$$
\begin{aligned}
&= B'_5 = (B'_1-1)^{\text{“}5\text{”}} \\
&\quad = -1+5B'_1-10B'_2+\cancel{10B'_3}-5B'_4+B_5 \\
&\quad \Rightarrow 0 = -1+\tfrac{5}{2}-\tfrac{5}{3}-5B'_4 \\
&\quad \Rightarrow B'_4 = \tfrac{-1}{30}
\end{aligned}
$$

$= \ldots$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\ldots$
B_k	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$\frac{-691}{2\,730}$	0	$\frac{7}{6}$	0	$\frac{-3\,617}{510}$	
B'_k		$\frac{1}{2}$																

k	$\ldots$	18	20	22	24	26	28	$\ldots$
B_k		$\frac{43\,867}{798}$	$\frac{-174\,611}{330}$	$\frac{854\,513}{138}$	$\frac{-236\,364\,091}{2\,730}$	$\frac{8\,553\,103}{6}$	$\frac{-23\,749\,461\,029}{870}$	

La valeur de $B_{12} = \frac{-691}{2\,730}$ “semble bien anéantir tout espoir raisonnable de trouver une forme close simple” ([Math Concrètes]).

$$B_{2k} = \frac{\text{[OEIS, A000367]}}{\text{[OEIS, A002445]}}$$

$B_4 = B_8 = B'_4 = B'_8 = \frac{-1}{30}$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} :\ B_k = (-1)^k B'_k \quad \in \mathbb{Q}}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} :\ B_k = B'_k}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}+2 : \operatorname{sign}(B_{k+2}) = -\operatorname{sign}(B_k)} \text{ où } \forall n \in \mathbb{Z} : \operatorname{sign}(n) := \begin{cases} -1 & \text{si } n < 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\forall k \in 2\mathbb{N}+3 :\ B_k = B'_k = 0}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} B_i = 0^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases} \\ \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} B'_i = k+1 \end{array} \right.}$$

$\left(\sqrt[k]{B_k} = ? \text{ et } \sqrt[\text{“}k\text{”}]{n} = ?\right)$

8.3 Formule de Faulhaber

Johann Faulhaber : astrologue “rigoureux” né à Ulm en Allemagne. Il prédit la fin du monde pour 1621 et... fut emprisonné en 1622 :-)

$$
\begin{aligned}
(B'_1+n)^{\text{“}k\text{”}} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B'_i n^{k-i} \\
&= \binom{k}{0} B'_0 n^k + \binom{k}{1} B'_1 n^{k-1} + \binom{k}{2} B'_2 n^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k} B'_k n^0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
[B'_1+(n-1)]^{``k"} &= [(B'_1-1)+n]^{``k"} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(B'_1-1)^{``i"}n^{k-i}\\
&= \binom{k}{0}(B'_1-1)^{``0"}n^{k}+\binom{k}{1}(B'_1-1)^{``1"}n^{k-1}\\
&\quad + \binom{k}{2}(B'_1-1)^{``2"}n^{k-2}+\cdots+\binom{k}{k}(B'_1-1)^{``k"}n^{0}\\
&= \binom{k}{0}B'_0n^{k}+\binom{k}{1}(B'_1-1)n^{k-1}\\
&\quad + \binom{k}{2}B'_2n^{k-2}+\cdots+\binom{k}{k}B'_kn^{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
(B'_1+n)^{``k"} & -(B'_1+n-1)^{``k"} & = k[B'_1-(B'_1-1)]n^{k-1} = k\,n^{k-1}\\
(B'_1+n-1)^{``k"} & -(B'_1+n-2)^{``k"} & = k(n-1)^{k-1}\\
(B'_1+n-2)^{``k"} & -(B'_1+n-3)^{``k"} & = k(n-2)^{k-1}\\
\ldots & & \\
(B'_1+1)^{``k"} & -B'_k & = k.1^{k-1}\\
\hline
(B'_1+n)^{``k"} & -B'_k & = k\left[n^{k-1}+(n-1)^{k-1}+(n-2)^{k-1}\right.\\
 & & \quad \left.+\cdots+1^{k-1}\right] = k\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}
\end{array}$$

donc $\sum_{i=1}^{n} i^{k-1} = \frac{1}{k}\left[(B'_1+n)^{``k"} - B'_k\right]$

$$\boxed{\forall k,n\in\mathbb{N}: \left|\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} i^k &= 1+2^k+3^k+4^k+\cdots+(n-1)^k\\
&= \frac{(B_1+n)^{``k+1"}-B_{k+1}}{k+1} = \frac{n}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_in^{k-i}\\[2ex]
\sum_{i=1}^{n} i^k &= 1+2^k+3^k+4^k+\cdots+n^k\\
&= \frac{(B'_1+n)^{``k+1"}-B'_{k+1}}{k+1} = \frac{n}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B'_in^{k-i}
\end{aligned}\right.}$$

Ce qui donne pour les premiers k :

Pour $k=0$: $\sum_{i=1}^{n} i^0 = \frac{n}{1}\binom{1}{0}B'_0n^0 = n$

Pour $k=1$: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}\left[\binom{2}{0}B'_0n+\binom{2}{1}B'_1n^0\right] = \frac{n}{2}\left(n+2\frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2} = t_n$

Pour $k=2$: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{3}\left[\binom{3}{0}B'_0n^2+\binom{3}{1}B'_1n+\binom{3}{2}B'_2n^0\right]$

$= \frac{n}{3}\left(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = P_n$

Pour $k=3$: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n}{4}\left[\binom{4}{0}B'_0n^3+\binom{4}{1}B'_1n^2+\binom{4}{2}B'_2n+\cancel{\binom{4}{3}B'_3n^0}\right]$

$= \frac{n}{4}\left(n^3+2n^2+n\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = C_n$

Pour $k=4$: $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n}{5}\left[\binom{5}{0}B'_0n^4+\binom{5}{1}B'_1n^3+\binom{5}{2}B'_2n^2+\cancel{\binom{5}{3}B'_3n}+\binom{5}{5}B'_4n^0\right]$

$= \frac{n}{5}\left(n^4+\frac{5}{2}n^3+\frac{5}{3}n^2-\frac{1}{30}\right) = \frac{n}{150}(30n^4+75n^3+50n^2-1)$

Pour $k = 10$: $\sum\limits_{i=1}^{n} i^{10} = \frac{n}{11} \sum\limits_{i=0}^{10} \binom{11}{i} B'_i n^{10-i}$

$$= \tfrac{n}{11} \left[\binom{11}{0} B'_0 n^{10} + \binom{11}{1} B'_1 n^9 \right.$$
$$\left. + \binom{11}{2} B'_2 n^8 + \binom{11}{4} B'_4 n^6 + \binom{11}{6} B'_6 n^4 + \binom{11}{8} B'_8 n^2 + \binom{11}{10} B'_{10} n^0 \right]$$
$$= \tfrac{n}{66} \left(6n^{10} + 33n^9 + 55n^8 - 66n^6 + 66n^4 - 33n^2 + 5 \right)$$

Avec la définition standard :

Pour $k = 2$: $\sum\limits_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n}{3} \left[\binom{3}{0} B_0 n^2 + \binom{3}{1} B_1 n + \binom{3}{2} B_2 n^0 \right]$

$$= \tfrac{n}{3} \left(n^2 - \tfrac{3}{2} n + \tfrac{1}{2} \right) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = P_{n-1}$$

n, m ? Plus généralement (Euler–Maclaurin) : $\forall m, n \in \mathbb{N}$: n, m ?

f fonction définie sur $\mathbb{N}$

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f(k) &= f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(n) \\ &= \int_1^n f(x)\,dx + \frac{f(n)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left[f^{2k-1}(n) - f^{2k-1}(1) \right] \\ &\quad + R_{n,m} \qquad \text{avec } R_{n,m} \leqslant \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \int_1^n \left| f^{2n+1}(x) \right| dx \end{aligned}}$$

(Existe-t-il un prolongement de f dans $\mathbb{R}$ tel que $R_{n,m} = 0$?)

Sur [MathWorld] :
http://mathworld.wolfram.com/Euler-MaclaurinIntegrationFormulas.html

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_0^n f(x)\,dx - \frac{f(n)+f(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left[f^{2k-1}(n) - f^{2k-1}(0) \right]}$$

9 Somme d'une progression géométrique

Pour $q \in \mathbb{N}{+}2$: $q^n = \overline{q\underbrace{0\ldots0}_{n}}^{q}$ et $q^n - 1 = \overline{\underbrace{(q-1)\ldots(q-1)}_{n}}^{q}$

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{N}{+}2, \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \overline{\underbrace{1\ldots1}_{n}}^{q} = \frac{q^n-1}{q-1}} \qquad \boxed{\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \overline{\underbrace{1\ldots1}_{n}}^{2} = 2^n - 1}$$

Plus généralement : soit $S = \sum\limits_{i=0}^{n-1} q^i$

$$(q-1)S = qS - S = \sum_{i=1}^{n} q^i - \sum_{i=0}^{n-1} q^i = q^n - 1$$

donc pour $q \neq 1$: $S = \frac{q^n-1}{q-1}$

Somme des n premiers éléments de la progression géométrique de raison q dont le premier élément est 1 :

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n-1} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$\boxed{\forall q \in]-1, 1[: \sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1 - q}}$$

10 Décomposition en facteurs premiers

10.1 Division euclidienne

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall d \in \mathbb{N}_*, \exists!\, q, r \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} n = qd + r \\ r < d \end{array} \right.}$$

On appelle q le quotient de la division de n par d, et r le reste de cette division.

$\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = q \quad$ et $n \% d := n \bmod d := r$

Si $r = 0$ on dit que d divise n ou que d est un diviseur de n ou que n est un multiple de d.

10.2 Diviseurs

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall d \in \mathbb{N}_* : \left| \begin{array}{l} d \setminus n \text{ signifie que } d \text{ divise } n \text{ (c.-à-d. } \exists q \in \mathbb{N} : n = qd) \\ d \not\setminus n \text{ signifie que } d \text{ ne divise pas } n \end{array} \right.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} :\ 1 \setminus n}$$

$$\boxed{\forall d \in \mathbb{N}_* : \left| \begin{array}{l} d \setminus 0 \\ d \setminus d \end{array} \right.}$$

$$\boxed{\setminus \text{ est une relation d'ordre dans } \mathbb{N}_*}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} a \sqcap b := \begin{cases} \max\{d \in \mathbb{N}_* \mid d \setminus a \text{ et } d \setminus b\} \quad \in \mathbb{N}_* & \text{si } a > 0 \text{ ou } b > 0 \\ 0 & \text{si } a = b = 0 \end{cases} \\ \qquad\qquad \text{le plus grand commun diviseur (pgcd) de } a \text{ et } b \\ a \perp b \overset{\triangle}{\iff} a \sqcap b = 1 \quad (a \text{ est premier avec } b) \end{array} \right.$$

$$\boxed{(\mathbb{N}, \sqcap) \text{ est un monoïde commutatif de neutre } 0}$$

$(a \sqcap b) \sqcap c = a \sqcap (b \sqcap c)$
$n \sqcap 0 = n = 0 \sqcap n$
$a \sqcap b = b \sqcap a$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} n = 1 \iff n \perp 0 \\ n \perp n + 1 \end{array} \right.}$$

$\forall d \in \mathbb{N}_*, \forall n \in \mathbb{N} :\ m_d(n) := \max\{k \in \mathbb{N} \mid d^k \setminus n\}$

$$\boxed{\forall d \in \mathbb{N}_* : \left| \begin{array}{l} m_d(0) = \infty \\ \forall n \in \mathbb{N}_* : \ m_d(n) \in \mathbb{N} \end{array} \right.}$$

$\boxed{\forall d \in \mathbb{N}_*, \forall a, b \in \mathbb{N} : \ m_d(a.b) = m_d(a) + m_d(b)}$ (m_d est complètement additive)

10.3 Nombres premiers : $\mathcal{P}_k$

Un naturel n est dit premier s'il possède *exactement* 2 diviseurs (1 et n).
Ensemble des nombres premiers $\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots\}$

$\forall k \in \mathbb{N} : \ \mathcal{P}_k := \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \text{le } k^e \text{ nombre premier} & \text{si } k > 0 \end{cases}$ [OEIS, A000040]

Les naturels > 1 non premiers sont dit composés [OEIS, A002808]

10.4 Identité de Bachet–Bézout

$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N}, \exists m, n \in \mathbb{Z} : ma + nb = a \sqcap b}$

Démonstration
Pour $a, b \in \mathbb{N}_*$:
Soit l'ensemble $D = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}_*$
Comme il n'est pas vide il admet un minimum $d \in \mathbb{N}_*$
Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $d = ma + nb$
Soient $q, r \in \mathbb{N}$ résultats de la division euclidienne de a par d : $a = qd + r$
Donc $r = a - qd = a - q(ma + nb) = (1 - qm)a - qnb$
Supposons que $r \neq 0$, alors $r \in D$, mais $r < d$; KO, donc $r = 0$ et $d \setminus a$

De même $d \setminus b$

Si $c \in \mathbb{N}_*$ tel que $c \setminus a$ et $c \setminus b$, alors $c \setminus d$
Donc d est bien le plus grand commun diviseur de a et b $\square$

En passant, cela montre
$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N}_* : \ a \sqcap b = \min\left(\{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}_*\right)}$

10.5 Lemme d'Euclide (ou théorème de Gauss)

$\boxed{\forall p \text{ premier}, \forall a, b \in \mathbb{N} : \ p \setminus ab \implies p \setminus a \text{ ou } p \setminus b}$

Démonstration
Pour $a, b \in \mathbb{N}_*$:
Si $p \not\setminus a$ alors $p \perp a$ donc $\exists m, n \in \mathbb{Z} : \ mp + na = 1$
En multipliant par b : $mpb + nab = b$
Comme $p \setminus ab$: $\exists k \in \mathbb{N} : \ ab = kp$
Donc $b = mpb + nkp = (mb + nk)p$, c.-à-d. que $p \setminus b$ $\square$

10.6 Symbole produit : $\prod$

$\prod\limits_{P(i)} s_i :=$ produit de tous les s_i tels que la propriété P est vraie pour i

$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \prod\limits_{i=a}^{b} s_i := \prod\limits_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ a \leqslant i \leqslant b}} s_i = s_a.s_{a+1}.s_{a+2}.\ \ldots\ .s_{b-2}.s_{b-1}.s_b$

$\prod\limits_{i=0}^{\infty} s_i := \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} s_i = s_0.s_1.s_2.\cdots = \lim\limits_{n \to \infty} \prod\limits_{i=0}^{n} s_i$

C'est la notation Pi, introduite par Carl Jacobi en 1829.

Ce sont des produits formels : s'il y a une infinité de facteurs $\neq 1$ la valeur du produit n'est pas forcément défini.

Le produit vide : $\prod\limits_{i \in \emptyset} s_i = 1 \qquad \Rightarrow \boxed{0^0 := 1}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}_* :\ 0^n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} :\ n^0 = 1 \end{array}}$$

C'est le lien avec la théorie des ensembles qui dicte $0^0 = 1$.
Un autre argument est que lorsque l'on écrit un polynôme sous cette forme $a_0.x^0 + a_1.x^1 + a_2.x^2 + \ldots a_k.x^k$ on s'attend à ce que $x^0 = 1$ quelque soit x.

$$\left(\sum_{i=0}^{k} a_i x^i\right)(0) = a_0$$

Prudence toutefois, car, par exemple, 0^{k-k} ne peut être décomposé en $0^k.0^{-k}$

Et surtout lorsqu'il est question de limite, car :

$$\lim_{x \to 0} x^0 = \lim_{x \to 0^+} x^x = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 0^+} 0^x$$

10.7 Théorème fondamental de l'arithmétique

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}_*, \exists!(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_*} \subseteq \mathbb{N} :\ n = \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_i^{\alpha_i}} \qquad \text{(forme standard de } n\text{)}$$

C.-à-d. que tout naturel non nul se décompose de manière unique (aux permutations près) en un produit de facteurs premiers :

1 (produit vide)
$2 = 2$
$3 = 3$
$4 = 2.2 = 2^2$
$5 = 5$
$6 = 2.3$
$7 = 7$
$8 = 2.2.2 = 2^3$
…

Démonstration
Existence :
Si $n = 1$: $\forall i : \ \alpha_i = 0$
Si n est premier : $\exists! \, i : \left| \begin{array}{l} \alpha_i = 1 \\ \forall j \neq i : \ \alpha_j = 0 \end{array} \right.$
Si n est composé : $\exists a, b \in \mathbb{N}{+}2 : \left| \begin{array}{l} n = ab \\ a < n \\ b < n \end{array} \right.$
Si a est composé on peut le réduire en un produit de facteurs $< a$. De même pour b. Et comme on ne peut décroître indéfiniment dans les naturels, on fini par tomber sur des facteurs premiers.

Unicité :
Par l'absurde. Supposons $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_*} \neq (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}_*}$ tel que $n = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_i^{\alpha_i} = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_i^{\beta_i}$
Soit k tel que $0 \neq \alpha_k \neq \beta_k$ (à l'inversion des (α_i) et (β_i) près)
$\mathcal{P}_k \setminus n \overset{\text{Euclide}}{\Longrightarrow} \exists i : \ \mathcal{P}_k \setminus \mathcal{P}_i^{\beta_i} \overset{\text{Euclide}}{\Longrightarrow} \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}_k \setminus \mathcal{P}_i \\ \beta_i \neq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} i = k \\ \beta_k \neq 0 \end{array} \right.$
$\mathcal{P}_k^{\alpha_k} \setminus n \implies \alpha_k \leqslant \beta_k$
$\mathcal{P}_k^{\beta_k} \setminus n \implies \alpha_k \geqslant \beta_k$
Donc $\alpha_k = \beta_k$ KO □

$\forall i \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_* : \ \alpha_i(n) := \begin{cases} m_{\mathcal{P}_i}(n) & \text{si } i > 0 \\ 0 & \text{si } i = 0 \end{cases}$
$\forall p \in \mathbb{P}, \forall n \in \mathbb{N}_* : \ v_p(n) := m_p(n)$ est appelé valuation p-adique de n

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}_* : \ n = \prod_{i \in \mathbb{N}_*} \mathcal{P}_i^{\alpha_i(n)} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_i^{\alpha_i(n)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(n)}}$$

$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{N}_* : \ \alpha_i(a.b) = \alpha_i(a) + \alpha_i(b)}$ (α_i est complètement additive)

$\boxed{\forall p \in \mathbb{P}, \forall a, b \in \mathbb{N}_* : \ v_p(a.b) = v_p(a) + v_p(b)}$ (v_p est complètement additive)

10.8 Fonction de Möbius : $\mu(n)$

Fonction de Möbius [OEIS, A008683] :
$\forall n \in \mathbb{N}_*$:
$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon, c.-à-d. si } n \text{ contient des facteurs carrés} \end{cases}$$

$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N}_* : \left| \begin{array}{l} a \perp b \implies \mu(a.b) = \mu(a).\mu(b) \\ a \not\perp b \implies \mu(a.b) = 0 \end{array} \right.}$ (μ est multiplicative)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}_* : \ \sum_{d \setminus n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}_* : \ \mu(n) = 0 \iff \exists d \in \mathbb{N}+2 : d^2 \setminus n}$$

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$F(n) := \sum_{d \setminus n} f(d)$ Relation de réciprocité : $f(n) = \sum_{d \setminus n} F(\frac{n}{d})\mu(d)$

f est multiplicative $\iff$ F est multiplicative

Fonction de Mertens :

$\forall n \in \mathbb{N}_* : \ M(n) := \sum_{i=1}^{n} \mu(i) \quad \in \mathbb{Z}$ [OEIS, A002321]

10.9 Nombre de facteurs premiers : $\Omega(n)$, $\omega(n)$ et nombre des diviseurs : $\nu(n)$

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$\omega(n)$:= nombre de facteurs premiers distincts de n [OEIS, A001221]

$\Omega(n)$:= nombre (avec multiplicité) de facteurs premiers de n[OEIS, A001222]

$\nu(n)$:= nombre de diviseurs de n [OEIS, A000005]

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...
$\omega(n)$	∞	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	2	1	1	2	1	
$\Omega(n)$	∞	0	1	1	2	1	2	1	3	2	2	1	3	1	2	2	4	1	3	1	
$\nu(n)$	∞	**1**	**2**	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ 1 \overset{(n\geqslant 2)}{\leqslant} \omega(n) \leqslant \Omega(n) \overset{(n\geqslant 1)}{<} \nu(n) \overset{(n\geqslant 3)}{<} n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ n \text{ est premier} \iff \Omega(n) = 1 \iff \nu(n) = 2 \implies \omega(n) = 1}$$

$$\boxed{\forall p \text{ premier}, \forall k \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{lcl} \omega(p^k) & \overset{(k>0)}{=} & 1 \\ \Omega(p^k) & = & k \\ \nu(p^k) & = & k+1 \overset{(k>0)}{=} \omega(p^k) + \Omega(p^k) \end{array} \right.}$$

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N} : \ a \perp b \iff \nu(a.b) = \nu(a).\nu(b)} \qquad (\nu \text{ est multiplicative})$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} \omega(n) = \sum\limits_{\substack{p \setminus n \\ p \text{ premier}}} 1 \overset{(n>0)}{=} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \max\{\alpha_i(n), 1\} \\ \Omega(n) = \sum\limits_{\substack{p \setminus n \\ p \text{ premier}}} v_p(n) \overset{(n>0)}{=} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i(n) \\ \nu(n) = \sum\limits_{d \setminus n} 1 = \sum\limits_{d \setminus n} d^0 \overset{(n>0)}{=} \prod\limits_{i=1}^{\infty} [\alpha_i(n) + 1] \end{array} \right.}$$

11 Somme des diviseurs

11.1 Fonctions σ

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$\sigma_{\text{pair}}(n)$:= somme des diviseurs pairs de n $\qquad \sigma(2n) =$ [OEIS, A074400]

$\sigma_{\text{impair}}(n)$:= somme des diviseurs impairs de n $\qquad$ [OEIS, A000593]

$\sigma(n) := \sigma_{\text{pair}}(n) + \sigma_{\text{impair}}(n) =$ somme des diviseurs de n $\qquad$ [OEIS, A000203]

$s(n) := \sigma(n) - n =$ somme des diviseurs propres de n (c.-à-d. différents de n) [OEIS, A001065]

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$\sigma_{\text{pair}}(n)$	∞	0	**2**	0	6	0	8	0	14	0	12	0	24	0	16	0	30	
$\sigma_{\text{impair}}(n)$	∞	**1**	1	4	1	6	4	8	1	13	6	12	4	14	8	24	1	
$\sigma(n)$	∞	**1**	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28	14	24	24	31	
$s(n)$	∞	0	1	1	3	1	**6**	1	7	4	8	1	16	1	10	9	15	

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} n = 1 \iff \mathbf{n} = \sigma(n) \iff \sigma(n) = n^2 \\ 1 \leqslant \sigma(n) \\ n \leqslant \sigma(n) \overset{(n \neq 0)}{\leqslant} \frac{n^2}{2} \end{array} \right.$$

? $$\forall n \in \mathbb{N}+4 : \left| \begin{array}{l} n = 6 \iff \sigma(n) = n\lfloor \lg(n) \rfloor \\ \sigma(n) \leqslant n\lfloor \lg(n) \rfloor < n^2 < \infty \end{array} \right.$$ [10] ?

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ n \text{ est premier} \iff \sigma(n) = n + 1 \iff s(n) = 1$$

$$\forall p \text{ premier} : \ [\sigma(p)]^2 = \sigma(p^2) + p$$

$$\forall p \text{ premier}, \forall k \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} \sigma(p^k) = \sum_{i=0}^{k} p^i = \underbrace{\overline{1 \dots 1}^{p}}_{k+1} = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} \\ \sigma(p^{k+1}) = \sigma(p^k) + p^{k+1} \\ \sigma(p^{2k}) = \left(p^{k+1} + 1\right) \sigma(p^k) - p^{2k+1} \\ \sigma(p^{2k+1}) = \left(p^{k+1} + 1\right) \sigma(p^k) \end{array} \right.$$

$$\sigma(2^k) = 2^{k+1} - 1 = M_{k+1}$$

$$\forall p \text{ premier}, \forall n \in \mathbb{N}_* : \sigma(pn) = \sigma(n) + p^{\nu_p(n)+1} \, \sigma\left(\frac{n}{p^{\nu_p(n)}}\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_* : \left| \begin{array}{l} \sigma(n) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\mathcal{P}_i^{\alpha_i(n)+1} - 1}{\mathcal{P}_i - 1} \\ \sigma_{\text{impair}}(n) = \prod_{i=2}^{\infty} \frac{\mathcal{P}_i^{\alpha_i(n)+1} - 1}{\mathcal{P}_i - 1} \\ \sigma_{\text{pair}}(n) = 2\left[2^{\alpha_1(n)} - 1\right] \prod_{i=2}^{\infty} \frac{\mathcal{P}_i^{\alpha_i(n)+1} - 1}{\mathcal{P}_i - 1} \end{array} \right.$$

10. $\lg(x) := \log_2(x)$, le logarithme de x en base 2

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}:\ \sigma_{\text{pair}}(2n) = 2\sigma(n)}$$

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N}:\ \sigma(a.b) \leqslant \sigma(a).\sigma(b)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}{+}2:\ \sigma(n^2) < [\sigma(n)]^2$$

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N}:\ a \perp b \iff \sigma(a.b) = \sigma(a).\sigma(b)} \qquad (\sigma \text{ est multiplicative})$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}:\ \sigma(t_n) = \begin{cases} \sigma(\frac{n}{2}).\sigma(n+1) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \sigma(\frac{n+1}{2}).\sigma(n) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}_*:\ n \text{ est impair} &\iff \sigma_{\text{pair}}(n) = 0 \iff \sigma_{\text{impair}}(n) = \sigma(n) \\ &\iff \sigma(2n) = 3\sigma(n) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}:\ \sigma_{\text{impair}}(n) = \sigma\left(\frac{n}{2^{m_2(n)}}\right) \overset{(n\neq 0)}{=} \frac{\sigma(n)}{2^{m_2(n)+1} - 1}}$$

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N}:\ \sigma_{\text{impair}}(a.b) \leqslant \sigma_{\text{impair}}(a).\sigma_{\text{impair}}(b)}$$

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N}:\ \left(\exists k \in \mathbb{N} : a \sqcap b = 2^k\right) \iff \sigma_{\text{impair}}(a.b) = \sigma_{\text{impair}}(a).\sigma_{\text{impair}}(b)}$$

$$(\sigma_{\text{impair}} \text{ est multiplicative})$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}_*:\ \left|\begin{aligned} \sigma_{\text{pair}}(n) &= 2\left[2^{m_2(n)} - 1\right] \sigma_{\text{impair}}(n) = 2\,M_{m_2(n)}\ \sigma_{\text{impair}}(n) \\ \sigma(n) &= \left[2^{m_2(n)+1} - 1\right] \sigma_{\text{impair}}(n) = M_{m_2(n)+1}\ \sigma_{\text{impair}}(n) \end{aligned}\right.}$$

$$\boxed{\text{Points fixes : } \left|\begin{aligned} &\sigma(1) = \sigma_{\text{impair}}(1) = \mathbf{1} \\ &\sigma_{\text{pair}}(2) = \mathbf{2} \end{aligned}\right.}$$

1 est l'unique point fixe de σ et est l'unique point fixe *impair* de σ_{impair} 2 est l'unique point fixe de σ_{pair}

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}:\ (\exists k \in \mathbb{N} : n = 2^k) \iff \sigma_{\text{impair}}(n) = 1} \qquad \sigma_{\text{impair}}(2^k) = 1$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in 2\mathbb{N}{+}1:\ \sigma_{\text{impair}}(2^k n) = \sigma(n) \begin{cases} = \mathbf{1} & \text{si } n = 1 \\ > n & \text{si } n > 1 \end{cases}}$$

Problème $\boldsymbol{\sigma_{\text{impair}}}$: $\boldsymbol{\sigma_{\text{impair}}}(n) \xrightarrow{?} 1$

Je **conjecture** que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}_*, \exists?\, k \in \mathbb{N}:\ \sigma^k_{\text{impair}}(n) = 1}$$

($\Longrightarrow$ il n'existe pas de nombre parfait impair, cf. p. 56)

Conjecture équivalente :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}{+}2, \exists?\, k \in \mathbb{N}:\ \sigma^k_{\text{impair}}(n) < n}$$

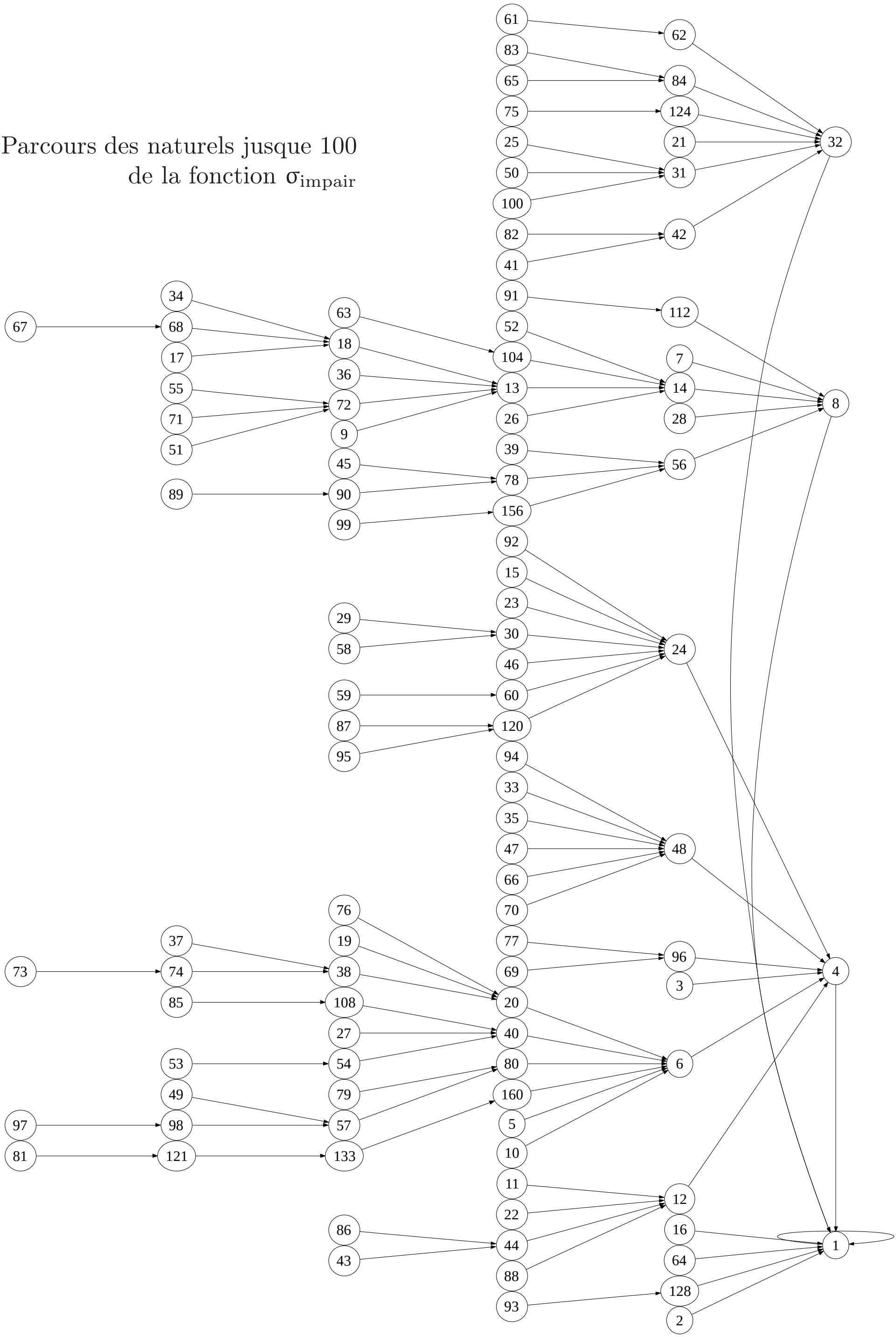
($\iff$ le problème σ_{impair} est vrai)

Je **conjecture** de plus que (vérifiée pour les $n \leqslant 1\ 000\ 000$) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}_*:\ \sigma^n_{\text{impair}}(n) \overset{?}{=} 1}$$

($\Longrightarrow$ le problème σ_{impair} est vrai)

Parcours des naturels jusque 100
de la fonction σ_{impair}



$$\forall n \in \mathbb{N}_* : \left| \begin{array}{lrcl} n = & 1 & \Longrightarrow & \sigma^0_{\text{impair}}(n) = 1 \\ n \leqslant & 2 & \Longrightarrow & \sigma^1_{\text{impair}}(n) = 1 \\ n \leqslant & 4 & \Longrightarrow & \sigma^2_{\text{impair}}(n) = 1 \\ n \leqslant & 8 & \Longrightarrow & \sigma^3_{\text{impair}}(n) = 1 \\ n \leqslant & 16 & \Longrightarrow & \sigma^4_{\text{impair}}(n) = 1 \\ n \leqslant & 66 & \Longrightarrow & \sigma^5_{\text{impair}}(n) = 1 \\ n \leqslant & 192 & \Longrightarrow & \sigma^6_{\text{impair}}(n) = 1 \\ n \leqslant & 1\ 068 & \Longrightarrow & \sigma^7_{\text{impair}}(n) = 1 \\ n \leqslant & 2\ 136 & \Longrightarrow & \sigma^8_{\text{impair}}(n) = 1 \\ n \leqslant & 4\ 272 & \Longrightarrow & \sigma^9_{\text{impair}}(n) = 1 \\ n \leqslant & 34\ 182 & \Longrightarrow & \sigma^{10}_{\text{impair}}(n) = 1 \\ n \leqslant & 205\ 096 & \Longrightarrow & \sigma^{11}_{\text{impair}}(n) = 1 \\ n \leqslant & 990\ 360 & \Longrightarrow & \sigma^{12}_{\text{impair}}(n) = 1 \\ n \leqslant & 1\ 000\ 000 & \Longrightarrow & \sigma^{13}_{\text{impair}}(n) = 1 \end{array} \right.$$

11.2 Nombres parfaits

Un nombre est dit parfait lorsqu'il est égal à la somme de ses diviseurs propres.

? $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ n \text{ est parfait} \overset{\triangle}{\iff} s(n) = n \iff \sigma(n) = 2n}$ [OEIS, A000396] ?

Les diviseurs de 6 sont $1, 2, 3, 6$ or $6 = 1 + 2 + 3$
Les diviseurs de 28 sont $1, 2, 4, 7, 14, 28$ or $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} n \text{ est dit déficient si } s(n) < n \iff \sigma(n) < 2n \\ n \text{ est dit abondant si } s(n) > n \iff \sigma(n) > 2n \end{array}$$

Nombres de Mersenne : M_n

$\forall n \in \mathbb{N} : \ M_n := 2^n - 1 = \underbrace{\overline{1\dots1}^{2}}_{n}$ [OEIS, A000225]

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
M_n	**0**	**1**	3	7	15	31	63	127	255	511	1 023	2 047	4 095	8 191	

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{ll} M_{4n} & \equiv 5\ [10] \quad \text{ou } n = 0 \\ M_{4n+1} & \equiv 1\ [10] \\ M_{4n+2} & \equiv 3\ [10] \\ M_{4n+3} & \equiv 7\ [10] \end{array} \right.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{ll} \int_n^{n+2} M_\bullet & = M_{n+1} + M_n = 3.2^n - 2 \\ \Delta M_\bullet(n) & = M_{n+1} - M_n = 2^n \\ \int M_\bullet(n) & = M_n - n \end{array} \right.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ M_{n+1} = 2 M_n + 1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ \sigma(M_n) = \sigma_{\text{impair}}(M_n) \geqslant 2^n}$$

composé factoriser ?

Pour M_n c "bien" le fa

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ M_n \text{ est premier} \iff \sigma(M_n) = 2^n$$
$$\implies \left| \begin{array}{l} \sigma^2(M_n) = M_{n+1} \\ \sigma^2_{\text{impair}}(M_n) = 1 \\ n \text{ est premier} \\ n = 2 \text{ ou } (M_n \equiv 1 \text{ ou } 7 \ [10]) \end{array} \right.$$

Les 47 nombres de Mersenne premiers connus : [OEIS, A000668]
$M_2 = 3,\ M_3 = 7,\ M_5 = 31,\ M_7 = 127,\ M_{13} = 8\ 191, M_{17} = 131\ 071,$
$M_{19} = 524\ 287, M_{31} = 2\ 147\ 483\ 647, M_{61} = 2\ 305\ 843\ 009\ 213\ 693\ 951,$
$M_{89}, M_{107}, M_{127}, M_{521}, M_{607}, M_{1\ 279}, M_{2\ 203}, M_{2\ 281}, M_{3\ 217}, M_{4\ 253}, M_{4\ 423},$
$M_{9\ 689}, M_{9\ 941}, M_{11\ 213}, M_{19\ 937}, M_{21\ 701}, M_{23\ 209}, M_{44\ 497}, M_{86\ 243}, M_{110\ 503},$
$M_{132\ 049}, M_{216\ 091}, M_{756\ 839}, M_{859\ 433}, M_{1\ 257\ 787}, M_{1\ 398\ 269}, M_{2\ 976\ 221},$
$M_{3\ 021\ 377}, M_{6\ 972\ 593}, M_{13\ 466\ 917}, M_{20\ 996\ 011}, M_{24\ 036\ 583}, M_{25\ 964\ 951},$
$M_{30\ 402\ 457}, M_{32\ 582\ 657}, M_{37\ 156\ 667}, M_{42\ 643\ 801}, M_{43\ 112\ 609}$

(Les indices : [OEIS, A000043])

Conjecture :

$$\boxed{\overset{\infty}{\exists}?n \in \mathbb{N} : \ M_n \text{ est premier}}$$

Infinité de nombres de Mersenne premiers ?

?

$$\forall n \in \mathbb{N} : n = \prod_{i=1}^{r} M_{\alpha_i} \text{ avec} \left| \begin{array}{l} r \in \mathbb{N} \\ \alpha_i \text{ distincts} \in \mathbb{N}_* \\ M_{\alpha_i} \text{ sont premiers} \end{array} \right.$$
$$\iff \sigma(n) = 2^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$
$$\iff \sigma_{\text{impair}}(n) = 2^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$
$$\implies \left| \begin{array}{l} \omega(n) = \Omega(n) = r \\ \nu(n) = 2^r \\ \sigma^2_{\text{impair}}(n) = 1 \end{array} \right.$$
$$\text{De plus : } \left| \begin{array}{l} k = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \\ \sigma^2(n) = M_{k+1} \\ \alpha_i \text{ sont premiers} \end{array} \right.$$

$n =$ [OEIS, A046528]

?

$k =$ [OEIS, A048947]

($\Leftarrow$ cf. [MathWorld] http://mathworld.wolfram.com/DivisorFunction.html)

Nombres triangulaires de Mersenne : t_{M_n} [OEIS, A006516]

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ t_{M_n} = 2^{n-1} M_n = 2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{2n-1} - 2^{n-1} = \overline{\underbrace{1\ldots1}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{n-1}}^{2}$$
$$= \frac{M_n^{\overline{2}}}{2} = \frac{(2^n)^{\underline{2}}}{2} = \binom{2^n}{2} = \mathrm{Poly}_6(2^{n-1})$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
t_{M_n}	**0**	**1**	6	28	120	496	2 016	8 128	32 640	130 816	523 776	

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}:\ n = \frac{\lfloor \lg(t_{M_n}) \rfloor}{2} + 1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: \left| \begin{array}{ll} t_{M_{4n}} & \equiv 0\ [10] \\ t_{M_{4n+1}} & \equiv 6\ [10] \quad \text{ou } n = 0 \\ t_{M_{4n+2}} & \equiv 6\ [10] \\ t_{M_{4n+3}} & \equiv 8\ [10] \end{array} \right.}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: \left| \begin{array}{rl} \int_n^{n+2} t_{M_\bullet} & = t_{M_{n+1}} + t_{M_n} = 5t_{M_n} + M_n + 1 \\ \Delta\, t_{M_\bullet}(n) & = t_{M_{n+1}} - t_{M_n} = 3t_{M_n} + M_n + 1 \\ & \ t_{M_{n+1}} = 4t_{M_n} + M_n + 1 \end{array} \right.}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}:\ t_{M_{2n+1}} = \sum_{i=0}^{M_n} (2i+1)^3 = \sum_{i=1}^{2^n} (2i-1)^3}$$ [11]

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}_*: \\ \left| \begin{array}{lll} \sigma(t_{M_n}) & = M_n\, \sigma(M_n) & \geqslant 2^n\, M_n = (M_n)^{\overline{2}} = (2^n)^{\underline{2}} \\ \sigma_{\text{impair}}(t_{M_n}) & = \sigma(M_n) & \geqslant 2^n \\ \sigma_{\text{pair}}(t_{M_n}) & = 2\, M_{n-1}\, \sigma(M_n) & \geqslant 2^{n+1}\, M_{n-1} = 4(M_{n-1})^{\overline{2}} = 4(2^{n-1})^{\underline{2}} \end{array} \right. \end{array}}$$

Nombres parfaits pairs

$$\boxed{\begin{array}{rl} \forall n \in \mathbb{N}: \left(\exists k \in \mathbb{N}: \left| \begin{array}{l} M_k \text{ est premier} \\ n = t_{M_k} \end{array} \right. \right) & \iff n \text{ est un nombre parfait pair} \\ & \iff \nu(n) = 2k = \lfloor \lg(n) \rfloor + 2 \\ & \implies \left| \begin{array}{l} \omega(n) = 2 \\ \Omega(n) = k \end{array} \right. \end{array}}$$

($\Rightarrow$ EUCLIDE, $\Leftarrow$ EULER)

$$\boxed{\begin{array}{rl} \forall n \in \mathbb{N}:\ M_n \text{ est premier} & \iff t_{M_n} \text{ est parfait} \\ & \iff \sigma(t_{M_n}) = 2^n\, M_n = (M_n)^{\overline{2}} = (2^n)^{\underline{2}} \end{array}}$$

? Premiers nombres parfaits pairs [OEIS, A000396] : ?
$t_3 = 6,\ t_7 = 28,\ t_{31} = 496,\ t_{127} = 8\,128,\ t_{8\,191} = 33\,550\,336, \dots$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}:\ t_{M_n} \text{ est parfait} \implies t_{M_n} \equiv 6 \text{ ou } 8\ [10]}$$

Éventuels nombres parfaits impairs

On ne connaît aucun nombre parfait impair, les mathématiciens pensent qu'il n'en existe pas. Dans ce cas seul le féminin pourrait être parfait ;-)

Conjecture :

$$\boxed{\nexists ?n \in 2\mathbb{N}+1:\ n \text{ est un nombre parfait}}$$ Inexistence de nombre parfait impair ?

11. D'après une idée de Michel BOELEN.

Je propose de nommer KW[12] l'éventuel plus petit nombre parfait impair.

$\boxed{\mathrm{KW} > 10^{500}}$

$\forall n$ parfait impair :	$\exists a, b \in \mathbb{N}_* : \ n = a^2 + b^2$ $n \equiv 1\ [12]$ ou $n \equiv 9\ [36]$	(STUYVAERT, 1896) (J. TOUCHARD, 1953)

$\forall n$ parfait impair, $\exists!\, r, \alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \in \mathbb{N}_*, \exists!\, p, p_1, p_2, \dots, p_r \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$:

$$\left| \begin{array}{l} n = p^\alpha \prod_{i=1}^{r} p_i^{2\beta_i} = p^\alpha p_1^{2\beta_1} \dots p_r^{2\beta_r} \\ \alpha \equiv p \equiv 1\ [4] \\ p_1 < p_2 < \dots < p_r \quad \text{et } \forall i :\ p \neq p_i \end{array} \right. \qquad \text{(EULER)}$$

De plus :

- $\omega(n) = 1 + r$
- $\Omega(n) = \alpha + 2 \sum_{i=1}^{r} \beta_i$
- $2n = \sigma(n) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{2\beta_i+1} - 1}{p_i - 1}$
- $\exists i : \beta_i \not\equiv 1\ [3]$ (W. L. MCDANIEL, 1970)
- $\min\{p, p_1\} \leqslant \frac{2\omega(n)+6}{3} = \frac{2\omega(n)}{3} + 2$ (O. GRÜN, 1952)
- $\min\{p, p_1\} \leqslant e^{49\ 740\ 100\ 000}$ (T. YAMADA, 2005)
- $\max\{p, p_r\} \geqslant 100\ 000\ 007$ (D. E. IANNUCCI, 2000,
  "les deux suivants" $\geqslant 10\ 007$ et 101 P. M. JENKINS, 2003)
- $p^\alpha > 10^{20}$ ou $\exists i : p_i^{2\beta_i} > 10^{20}$ (G. L. COHEN, 1987)
- $n \leqslant 2^{4^{\omega(n)}} = 16^{4^r}$ (P. P. NIELSEN, 2003)

$\forall n$ parfait impair :

- $\omega(n) \geqslant 9$ (P. P. NIELSEN, 2006)
- $\Omega(n) \geqslant 75$ (K. HARE, 2005)
- $n \perp 3 \implies \omega(n) \geqslant 12$ (P. P. NIELSEN, 2006)
- $n \perp 3$ et $5 \implies \omega(n) \geqslant 15$ (K. NORTON, 1960)
- $n \perp 3, 5$ et $7 \implies \omega(n) \geqslant 27$ (K. NORTON, 1960)
- $n \perp 3, 5, 7$ et $11 \implies \left| \begin{array}{l} \omega(n) \geqslant 41 \\ \Omega(n) \geqslant 81 \end{array} \right.$ (K. HARE, 2005)

$\forall n$ parfait impair :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{\text{impair}}(2n) = \sigma_{\text{impair}}(n) = \sigma(n) = 2n \\ \forall k \in \mathbb{N} :\ \sigma_{\text{impair}}^k(2n) = \mathbf{2n} \\ \forall k \in \mathbb{N}_* :\ \sigma_{\text{impair}}^k(n) = 2n \end{array} \right.$$

Si le problème σ_{impair} est vrai
alors il n'existe pas de nombre parfait impair

12. Pour Kwisatz Haderach. Les lecteurs de *Dune*[13] devrait comprendre l'allusion.
13. http://www.opimedia.be/livres/index.htm#Dune

12 Théorème des 4 carrés de LAGRANGE

“Le théorème de LAGRANGE intéresse les logiciens car il permet de montrer que les nombres naturels $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ sont définissables dans une axiomatique des nombres entiers $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.” (Bruno MARCHAL)

$\mathbb{R}$ est logiquement plus faible que $\mathbb{N}$:
on ne sait pas définir les entiers à partir des réels.

$\mathbb{Z}$ est logiquement équivalent à $\mathbb{N}$:
on sait construire les entiers à partir des naturels et inversement, grâce au théorème des 4 carrés, on sait construire les naturels à partir des entiers.

Remarquons que l'on ne sait pas définir les nombres naturels sans les utiliser !

Théorème des 4 carrés de LAGRANGE, 1770
(conjecture de BACHET, probablement déjà énoncée par DIOPHANTE) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists a, b, c, d \in \mathbb{N} : \ n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\begin{aligned}
0 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 \\
1 &= 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 \\
2 &= 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 \\
3 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 \\
4 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 \\
5 &= 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 \\
6 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 \\
7 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 \\
8 &= 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 \\
9 &= 2^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 = 3^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 \\
10 &= 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 3^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 \\
11 &= 3^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 \\
12 &= 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2
\end{aligned}$$

...

Théorème des 3 carrés (LEGENDRE, 1798 ; GAUSS) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} : \\ \quad \big(\nexists k, l \in \mathbb{N} : n = 4^k(8l + 7)\big) \iff \big(\exists a, b, c \in \mathbb{N} : n = a^2 + b^2 + c^2\big) \end{array}}$$

Théorème des 2 carrés :

? $$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}{+}2 : (\forall p \text{ premier} : p = 2 \text{ ou } p \equiv 3\ [4] \implies v_p(n) \text{ est pair}) \\ \qquad\qquad \iff \big(\exists a, b \in \mathbb{N} : n = a^2 + b^2\big) \end{array}}$$?

$\boxed{\forall n \in 4\mathbb{N}{+}1, \exists a, b \in \mathbb{N} : \ n = a^2 + b^2}$ (FERMAT - EULER)

$\forall k, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{GR}_k(n) &:= \text{nombre des décompositions de } n \text{ en somme de } k \text{ carrés d'entiers} \\
&= \text{nombre de solutions} \\
&\qquad\qquad \text{de l'équation diophantienne } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_k^2 = n
\end{aligned}$$

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} : \ \mathrm{GR}_k(0) = 1}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}_* : \ \mathrm{GR}_0(n) = 0}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}_* : \ \mathrm{GR}_1(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré} \end{cases}}$$

$$? \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}_* : \ \mathrm{GR}_2(n) = 4\left[\sigma_{\equiv 1[4]}(n) - \sigma_{\equiv 3[4]}(n)\right]} \stackrel{?}{=} 2 \sum_{i=0}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1} \mathrm{GR}_1(n - i^2) \quad ?$$

12.1 Nombre de représentations en somme de 4 carrés : GR(n)

Appelons habits d'un naturel n ses décompositions en somme de 4 carrés d'*entiers*.

$0 :$ $(0, 0, 0, 0)$
$1 :$ $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1),$
$(-1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 0), (0, 0, 0, -1)$
$2 :$ $(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1),$
$(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1), (0, 0, -1, 1),$
$(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1),$
$(-1, -1, 0, 0), (-1, 0, -1, 0), (-1, 0, 0, -1),$
$(0, -1, -1, 0), (0, -1, 0, -1), (0, 0, -1, -1)$
...

Garde-robe de $n \in \mathbb{N}$:
$\mathrm{GR}(n) := \mathrm{GR}_4(n)$ [OEIS, A000118]
$= \text{nombre des décompositions de } n \text{ en somme de 4 carrés d'entiers}$
$= \text{nombre de solutions de l'équation diophantienne } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n$

$$\boxed{\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}_* : \ \mathrm{GR}(n) &= 8\sigma_{\text{non multiple de } 4}(n) = 3^{1-n\%2}.8\,\sigma_{\text{impair}}(n) \\ &= \begin{cases} 24\,\sigma_{\text{impair}}(n) & \text{si } n \text{ pair} \\ 8\,\sigma_{\text{impair}}(n) = 8\,\sigma(n) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{aligned}}$$
(Jacobi, ~1825)

Démonstration
Prenons pour acquise l'égalité formelle suivante (cf. [A Short Proof] [14]) :

$$\forall q : \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\right)^4 = 1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{d \backslash n \\ 4 \nmid d}} d.q^n$$

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\right)^4 = \left(\dots + q^{(-2)^2} + q^{(-1)^2} + q^{0^2} + q^{1^2} + q^{2^2} + \dots\right)(\dots)(\dots)(\dots)$$
$$= \sum_{a,b,c,d \in \mathbb{Z}} q^{a^2} q^{b^2} q^{c^2} q^{c^2} = \sum_{a,b,c,d \in \mathbb{Z}} q^{a^2+b^2+c^2+c^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{GR}(n)\, q^n$$

14. Fonctions thêta de Jacobi : $\vartheta_3(z, q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nz)$
$\vartheta_3(q) := \vartheta_3(0, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}$ $(z, q \in \mathbb{C})$

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}_*} \mathrm{GR}(n)\, q^n = \sum_{n=1}^{\infty} 8 \sum_{\substack{d \backslash n \\ 4 \nmid d}} d\, q^n$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}_* :\ \mathrm{GR}(n) = 8 \sum_{\substack{d \backslash n \\ 4 \nmid d}} d$

$$\text{Or } \sum_{\substack{d \backslash n \\ 4 \nmid d}} d = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{d \backslash n \\ d\equiv 1\ [2]}} d + \sum_{\substack{d \backslash n \\ d\equiv 2\ [4]}} d = \sum_{\substack{d \backslash n \\ d\equiv 1\ [2]}} d + 2 \sum_{\substack{d \backslash n \\ d\equiv 1\ [2]}} d = 3\sigma_{\mathrm{impair}}(n) & \text{si } n \text{ pair}^{15} \\ \displaystyle\sum_{d \backslash n} d = \sigma_{\mathrm{impair}}(n) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

□

~ « — Quelle est la différence entre la réalité et la fiction ?

— . . .

— 18. Car 42 est la solution de l'Univers dans la fiction *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy* [16] et 24 est la solution de l'Univers dans la réalité mathématique. » (Bruno Marchal :-)

$8 = 2^3$
$18 = 2.3^2$
$24 = 2^3.3$
$42 = 2.3.7$

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{GR}(0) & & = \ 1 \\
\mathrm{GR}(1) & = 8.1 & = \ 8 = 2^3 \\
\mathrm{GR}(2) & = 24.1 = 8.(1+2) & = \ 24 = 2^3.3 \\
\mathrm{GR}(3) & = 8.(1+3) & = \ 32 = 2^5 \\
\mathrm{GR}(4) & = 24.1 & = \ 24 \\
\mathrm{GR}(5) & = 8.(1+5) & = \ 48 = 2^4.3 \\
\mathrm{GR}(6) & = 24.(1+3) & = \ 96 = 2^5.3 \\
\mathrm{GR}(7) & = 8.(1+7) & = \ 64 = 2^6 \\
\mathrm{GR}(8) & = 24.1 & = \ 24 \\
\mathrm{GR}(9) & = 8.(1+3+9) & = 104 = 2^3.13 \\
\mathrm{GR}(10) & = 24.(1+5) & = 144 = 2^4.3^2 \\
\mathrm{GR}(11) & = 8.(1+11) & = \ 96 \\
\mathrm{GR}(12) & = 24.(1+3) & = \ 96 \\
\mathrm{GR}(13) & = 8.(1+13) & = 112 = 2^4.7 \\
\dots & & \\
\mathrm{GR}(96) & = 24.(1+3) & = \ \mathbf{96} = 2^5.3 \\
\dots & &
\end{array}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
$\mathrm{GR}(n)$	1	8	24	32	24	48	96	64	24	104	144	96	96	112	192	192	

? $\forall n \in \mathbb{N} :$?

$$\begin{array}{l}
n = 0 \iff \mathrm{GR}(n) = 1 \\
n = 1 \iff \mathrm{GR}(n) = 8 \iff \left| \begin{array}{l} \mathrm{GR}(n) = 8n \\ n \text{ est impair} \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{l} \mathrm{GR}(n) = 8n^2 \\ n \text{ est impair} \end{array} \right. \\
n \text{ est impair} \implies 8n \leqslant \mathrm{GR}(n)
\end{array}$$

15. $3 = \sigma(2)$

16. http://books.google.com/books?id=hwK7AQAACAAJ
Le Guide du voyageur galactique (Douglas Adams)

? $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}{+}4 : \left| \begin{array}{l} n = 6 \iff \mathrm{GR}(n) = 8n\lfloor \lg(n) \rfloor \\ \mathrm{GR}(n) \leqslant 8n\lfloor \lg(n) \rfloor < 8n^2 < \infty \end{array}\right.}$$?

? $$\boxed{\mathrm{GR}(\mathbb{N}_*) \subseteq 8\,(\mathbb{N}_* \setminus \{2, 5, 7\})}$$?

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} :\ n \text{ est premier} \iff \mathrm{GR}(n) = 8(n+1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \implies \mathrm{GR}(n) = 8\,\sigma(n) \iff 4 \nmid n \end{array}}$$

(Pourrait-on exploiter cette relation pour tester *efficacement* la primalité ?)

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}_* : \left| \begin{array}{l} \mathrm{GR}\ (2^k) = 24 = 2^3.3 \\ \mathrm{GR}^2(2^k) = 96 = 2^5.3 \end{array}\right.}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}_* : \\ \quad \mathrm{GR}(2^k n) = \mathrm{GR}(2n) = 24\,\sigma_{\text{impair}}(n) = \begin{cases} \mathrm{GR}(n) & \text{si } n \text{ pair} \\ 3\,\mathrm{GR}(n) = 24\,\sigma(n) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{array}}$$

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N} :\ \left(\exists k \in \mathbb{N}_* : a \sqcap b = 2^k\right) \iff \left| \begin{array}{l} \mathrm{GR}(a.b) = \frac{\mathrm{GR}(a).\mathrm{GR}(b)}{24} \\ a \text{ et } b \text{ sont pairs} \end{array}\right.}$$

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N} :\ a \perp b \iff \left| \begin{array}{l} \mathrm{GR}(a.b) = \frac{\mathrm{GR}(a).\mathrm{GR}(b)}{8} \\ a \text{ ou } b \text{ est impair} \end{array}\right.}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} :\ M_n \text{ premier} \iff \mathrm{GR}(M_n) = 2^{n+3} \implies \left| \begin{array}{l} \mathrm{GR}^2(M_n) = 24 \\ \mathrm{GR}^3(M_n) = 96 \end{array}\right.}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} : n = \prod_{i=1}^{r} M_{\alpha_i} \text{ avec } \left| \begin{array}{l} r \in \mathbb{N} \\ \alpha_i \text{ distincts} \in \mathbb{N}_* \\ M_{\alpha_i} \text{ sont premiers} \end{array}\right. \\ \qquad\qquad \iff \mathrm{GR}(n) = 2^k \text{ avec } k \in \mathbb{N} \\ \text{De plus : } \left| \begin{array}{ll} k = 3 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i & \mathrm{GR}(2n) = 2^k.3 \\ \mathrm{GR}^2(n) = 24 & \mathrm{GR}^2(2n) = 96 \\ \mathrm{GR}^3(n) = 96 & \end{array}\right. \end{array}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}{+}2 : \left| \begin{array}{l} \mathrm{GR}(t_{M_n}) = 3\ \mathrm{GR}(M_n) \\ 3 \perp \sigma(M_n) \iff 3 \perp \mathrm{GR}(M_n) \implies \left| \begin{array}{l} \mathrm{GR}^2(t_{M_n}) = 4\,\mathrm{GR}^2(M_n) \\ \mathrm{GR}^3(t_{M_n}) = \mathrm{GR}^3(M_n) \end{array}\right. \end{array}\right.}$$

$$\boxed{\forall n \text{ parfait pair} : \left| \begin{array}{l} \mathrm{GR}(n) = 3.2^{m_2(n)+4} \\ \mathrm{GR}^2(n) = 96 \end{array}\right.}$$

$$\boxed{\forall n \text{ parfait impair} : \left| \begin{array}{l} \mathrm{GR}(n) = 16n \\ \forall k \in \mathbb{N}_* :\ \mathrm{GR}^2(n) = \mathrm{GR}(2^k n) = 48n \\ n \perp 3 \implies \forall k \in \mathbb{N}{+}3 :\ \mathrm{GR}^k(n) = 192n \end{array}\right.}$$

$$\boxed{\begin{array}{llcl} 3.96 & & = & 288 = 2^5.3^2 \\ GR(3.96) & = GR(2.3^2) & = & 312 = 2^3.3.13 \\ GR^2(3.96) & = GR(2.3.13) & = & 1\ 344 = 2^6.3.7 \\ GR^3(3.96) & = GR(2.3.7) & = & 768 = 2^8.3 \\ GR^4(3.96) & = GR(2.3) & = & 96 = 2^5.3 \end{array}}$$

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \text{ premier} \neq 2 : \ GR(p^k) = 8\frac{p^{k+1}-1}{p-1}}$ $\qquad GR(p) = 8(p+1)$

$$\boxed{\forall k, n \in \mathbb{N}, \forall p \text{ premier} \neq 2 : \ n \perp p \implies GR(p^k n) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1} GR(n)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ 4 \not\backslash n \iff GR(n) = 8\sigma(n)}$$

$\boxed{\text{Point fixe : } GR(96) = \mathbf{96}}$ $\qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ GR(n) = \mathbf{n} \implies 96 = 2^5.3 \setminus n}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ (n = 11 \text{ ou } n = 2^k.3 \text{ avec } k \in \mathbb{N}_*) \iff GR(n) = 96}$$

Problème GR **:** $GR(n) \xrightarrow{?} 96$

Je **conjecture** que :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists ?\, k \in \mathbb{N} : \ GR^k(n) = 96}$ $\qquad$ ($\Longrightarrow$ il n'existe pas de nombre parfait impair premier avec 3)

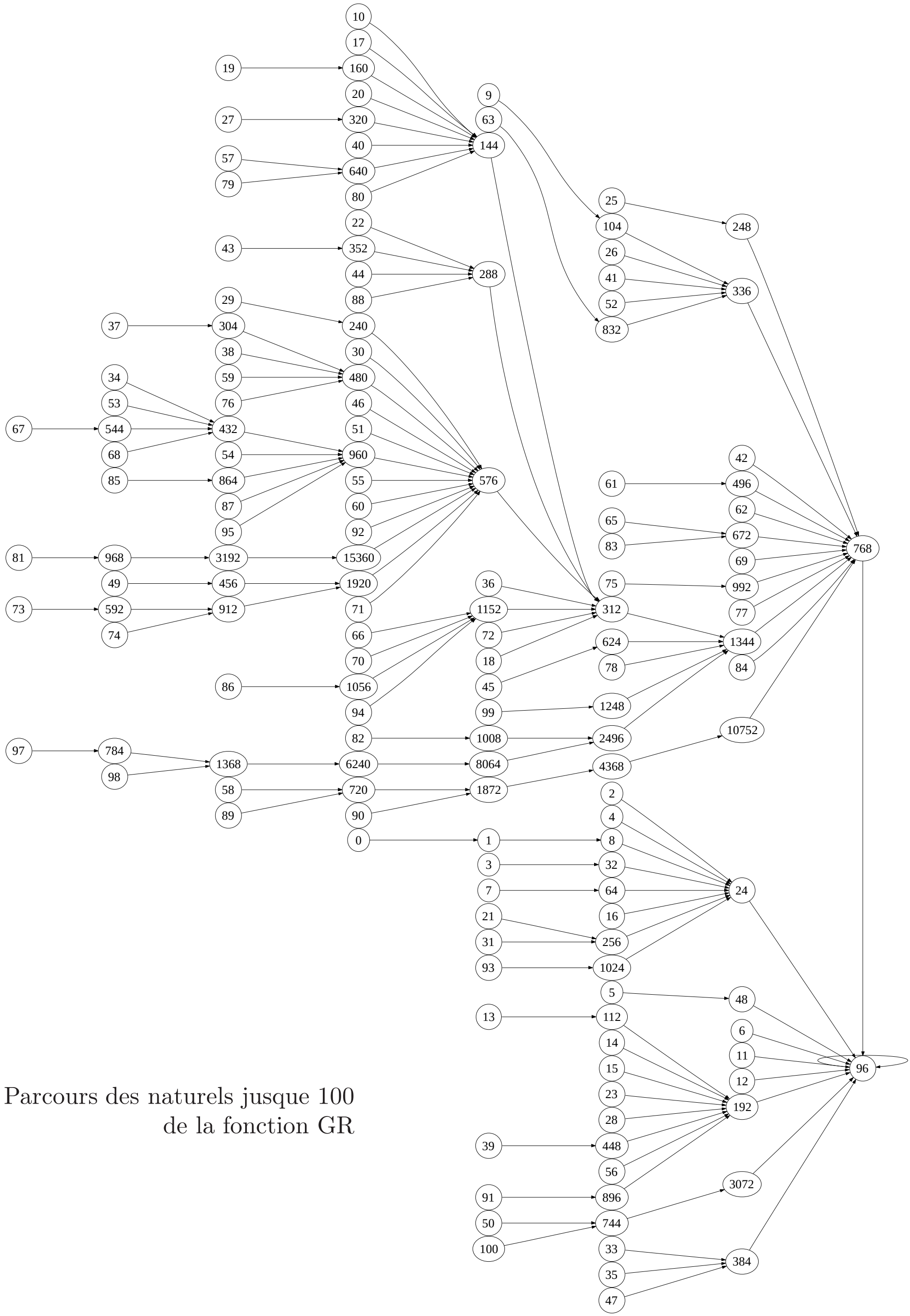
Conjecture équivalente :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}+97, \exists ?\, k \in \mathbb{N} : \ GR^k(n) < n}$ $\qquad$ ($\Longleftrightarrow$ le problème GR est vrai)

Je **conjecture** de plus que (vérifiée pour les $n \leqslant 1\ 000\ 000$) :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}+2 : GR^n(n) \stackrel{?}{=} 96}$ $\qquad$ ($\Longrightarrow$ le problème GR est vrai)

$$? \quad \boxed{\begin{array}{ll} \forall n \in \mathbb{N} : & n \leqslant 1\ 000\ 000 \\ & \text{ou } n = M_k \text{ premier} \\ & \text{ou } n = \prod_{i=1}^{r} M_{\alpha_i} \text{ avec les } M_{\alpha_i} \text{ premiers distincts} \\ & \text{ou } n \text{ est parfait} \\ & \text{ou } n = 2^k \\ & \text{ou } n = 2^k.3 \\ & \Longrightarrow \ GR(n) \longrightarrow 96 \end{array}} \quad ?$$



Parcours des naturels jusque 100
de la fonction GR

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: \left| \begin{array}{lrcll} n \leqslant & 9 & \Longrightarrow & \mathrm{GR}^4(n) & = 96 \\ n \leqslant & 18 & \Longrightarrow & \mathrm{GR}^5(n) & = 96 \\ n \leqslant & 33 & \Longrightarrow & \mathrm{GR}^6(n) & = 96 \\ n \leqslant & 66 & \Longrightarrow & \mathrm{GR}^7(n) & = 96 \\ n \leqslant & 105 & \Longrightarrow & \mathrm{GR}^8(n) & = 96 \\ n \leqslant & 210 & \Longrightarrow & \mathrm{GR}^9(n) & = 96 \\ n \leqslant & 420 & \Longrightarrow & \mathrm{GR}^{10}(n) & = 96 \\ n \leqslant & 3\ 048 & \Longrightarrow & \mathrm{GR}^{11}(n) & = 96 \\ n \leqslant & 10\ 656 & \Longrightarrow & \mathrm{GR}^{12}(n) & = 96 \\ n \leqslant & 21\ 312 & \Longrightarrow & \mathrm{GR}^{13}(n) & = 96 \\ n \leqslant & 97\ 560 & \Longrightarrow & \mathrm{GR}^{14}(n) & = 96 \\ n \leqslant & 195\ 120 & \Longrightarrow & \mathrm{GR}^{15}(n) & = 96 \\ n \leqslant & 1\ 000\ 000 & \Longrightarrow & \mathrm{GR}^{16}(n) & = 96 \end{array} \right.}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}_*, \forall k \in \mathbb{N}: \ \mathrm{GR}^k(n) = 96\, \sigma^k_{\mathrm{impair}}(n) \\ \quad \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} k \geqslant 2 \\ 3 \perp \sigma^k_{\mathrm{impair}}(n) \iff \mathrm{GR}^{k+1}(n) = 96\, \sigma^{k+1}_{\mathrm{impair}}(n) \\ \mathrm{GR}^{k+1}(n) = 24\, \frac{3^{m+2}-1}{3^{m+1}-1}\, \sigma^{k+1}_{\mathrm{impair}}(n) \quad \text{avec } m := m_3\left(\sigma^k_{\mathrm{impair}}(n)\right) \end{array} \right. \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} \forall n \in 2\mathbb{N}_*, \forall k \in \mathbb{N}+2: \ \text{si } \forall 1 \leqslant i < k : \sigma^i_{\mathrm{impair}}(n) \perp 3 \\ \text{alors } \mathrm{GR}^k(n) = 96\sigma^k_{\mathrm{impair}}(n) \end{array}}$$

Démonstration

$\mathrm{GR}(n) = 24\sigma_{\mathrm{impair}}(n)$

$$\begin{aligned} \mathrm{GR}^2(n) &= 24\sigma_{\mathrm{impair}}\left(3\sigma_{\mathrm{impair}}(n)\right) \\ &= 96\sigma^2_{\mathrm{impair}}(n) \qquad \text{ssi } \sigma_{\mathrm{impair}}(n) \perp 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{GR}^3(n) &= 24\sigma_{\mathrm{impair}}\left(3\sigma^2_{\mathrm{impair}}(n)\right) \\ &= 96\sigma^3_{\mathrm{impair}}(n) \qquad \text{ssi } \sigma^2_{\mathrm{impair}}(n) \perp 3 \end{aligned}$$

... □

$$\boxed{\begin{array}{r} \forall n \in 2\mathbb{N}+1, \forall k \in \mathbb{N}+3: \ \text{si } \forall 2 \leqslant i < k : \sigma^i_{\mathrm{impair}}(n) \perp 3 \\ \text{alors } \mathrm{GR}^k(n) = 96\sigma^k_{\mathrm{impair}}(n) \end{array}}$$

Démonstration

$\mathrm{GR}(n) = 8\sigma_{\mathrm{impair}}(n)$

$\mathrm{GR}^2(n) = 24\sigma^2_{\mathrm{impair}}(n)$

$$\begin{aligned} \mathrm{GR}^3(n) &= 24\sigma_{\mathrm{impair}}\left(3\sigma^2_{\mathrm{impair}}(n)\right) \\ &= 96\sigma^3_{\mathrm{impair}}(n) \qquad \text{ssi } \sigma^2_{\mathrm{impair}}(n) \perp 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{GR}^4(n) &= 24\sigma_{\text{impair}}\left(3\sigma^3_{\text{impair}}(n)\right) \\ &= 96\sigma^4_{\text{impair}}(n) \qquad \text{ssi } \sigma^3_{\text{impair}}(n) \perp 3 \end{aligned}$$

... $\square$

13 Fonction zêta de Riemann

13.1 Nombres harmoniques : H_n

$$\forall s \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N} :\ H_n^{(s)} := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} = \int \frac{1}{(\bullet+1)^s}(n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ H_n := H_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \int \frac{1}{\bullet+1}(n)$$

[OEIS, A001008]
[OEIS, A002805]

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
H_n	**0**	**1**	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{280}$	$\frac{7\ 129}{2\ 520}$	
$H_n^{(2)}$	**0**	**1**	$\frac{5}{4}$	$\frac{49}{36}$	$\frac{205}{144}$	$\frac{5\ 269}{3\ 600}$	$\frac{5\ 369}{3\ 600}$	$\frac{266\ 681}{176\ 400}$	$\frac{1\ 077\ 749}{705\ 600}$	$\frac{9\ 778\ 141}{6\ 350\ 400}$	
$H_n^{(3)}$	**0**	**1**	$\frac{9}{8}$	$\frac{251}{216}$	$\frac{2\ 035}{1\ 728}$	$\frac{256\ 103}{216\ 000}$	$\frac{28\ 567}{24\ 000}$	$\frac{9\ 822\ 481}{8\ 232\ 000}$	$\frac{78\ 708\ 473}{65\ 856\ 000}$	$\frac{19\ 148\ 110\ 939}{16\ 003\ 008\ 000}$	
$H_n^{(4)}$	**0**	**1**	$\frac{17}{16}$	$\frac{1\ 393}{1\ 296}$	$\frac{22\ 369}{20\ 736}$	$\frac{14\ 001\ 361}{12\ 960\ 000}$	$\frac{14\ 011\ 361}{12\ 960\ 000}$	$\frac{33\ 654\ 237\ 761}{31\ 116\ 960\ 000}$		...	

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \begin{aligned} & H_n^{(-3)} = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = C_n = \left(H_n^{(-1)}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ & H_n^{(-2)} = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = P_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ & H_n^{(-1)} = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = t_n = \frac{n(n+1)}{2} \\ & H_n^{(0)} = n \end{aligned} \right.$$

$$\forall s \in \mathbb{C} : \left| \begin{aligned} & H_0^{(s)} = \mathbf{0} \\ & H_1^{(s)} = \mathbf{1} \end{aligned} \right.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ \Delta H_\bullet(n) = \frac{1}{n+1}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_*, \forall n \in \mathbb{N} :\ \Delta^k H_\bullet(n) = -(-1)^k \frac{(k-1)!}{(n+1)^{\overline{k}}} = -(-1)^k (k-1)!\, n^{\underline{-k}}$$

13.2 Constante d'Euler-Mascheroni : γ

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} [H_n - \ln(n)] = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right] = 0{,}577\ 215\ 664\ldots$$ [17]

On ignore si γ est rationnelle.

17. $\ln(x) := \log_e(x)$, le logarithme de x en base e (logarithme népérien)

$$\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)} \qquad \text{(formule d'Euler)}$$

$$\boxed{\gamma = \int_0^\infty [e^{-x}\ln(x)\,dx]}$$

Théorème de Mertens (1874) :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(\mathcal{P}_n)} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{\mathcal{P}_k}} = e^{\gamma} = 1{,}781\,072\,417\ldots}$$

$$\forall s \in \mathbb{C} : \color{red}{\gamma^{(s)}} := \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{[\ln(k)]^s}{k} - \frac{[\ln(n)]^{s+1}}{s+1} \right\} = 0{,}577\,215\,664\ldots$$

$$\boxed{\gamma^{(0)} = \gamma}$$

13.3 Série de Riemann

$$\forall s \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots \text{ est appelée série de Riemann}$$
$$= \lim_{n\to\infty} H_n^{(s)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{C} : \ \Re(s) > 1 &\iff \text{la série de Riemann pour } s \text{ converge} \\ &\iff \text{la série de Riemann pour } s \text{ converge absolument} \end{aligned}}$$

13.4 Fonction zêta de Riemann : $\zeta(s)$

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(s) > 1 : \ \color{red}{\zeta(s)} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{n\to\infty} H_n^{(s)}$$

Cette fonction admet un unique prolongement sur tout le plan complexe en une fonction méromorphe[18]. Elle possède un unique pôle, en $s = 1$, qui est simple et de résidu 1.

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(s) > 1 : \ \zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}_*} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{p^s}{p^s - 1}}$$

(Euler)

n	...	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
$\zeta(n)$		$-\frac{1}{132}$	0	$\frac{1}{240}$	0	$-\frac{1}{252}$	0	$\frac{1}{120}$	0	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{\pi^2}{6}$	

$$\boxed{\forall s \in -2\mathbb{N}_* : \ \zeta(s) = 0} \qquad \text{(zéros triviaux) (se sont des zéros simples)}$$

$$\boxed{\overset{\infty}{\exists} s \in \mathbb{C} : \left| \begin{array}{l} \Re(s) = 1/2 \\ \zeta(s) = 0 \end{array} \right.} \qquad \text{(Hardy, 1914)}$$

18. ~ Quotient de deux fonctions holomorphes. Une fonction holomorphe étant une “fonction continue admettant une dérivée unique”.

Conjecture : **Hypothèse de Riemann** (1859) :

$$\boxed{\text{Tous les zéros non triviaux de } \zeta \text{ sont sur la droite critique } s = 1/2\,?}$$

(Un des problèmes mathématiques non résolus des plus importants !)

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty \qquad \text{(série harmonique)}$$

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{(Euler, } \sim 1722\text{)}$$

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = 1{,}202\ 056\ldots$$

(Constante d'Apéry. Elle est irrationnelle. Est-elle transcendante ?)

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\zeta(8) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \cdots = \frac{\pi^8}{9\ 450}$$

$$\boxed{\forall s \in 2\mathbb{N}_* : \ \zeta(s) = -(-1)^{\frac{s}{2}} \frac{B_s}{2\, s!} (2\pi)^s}$$

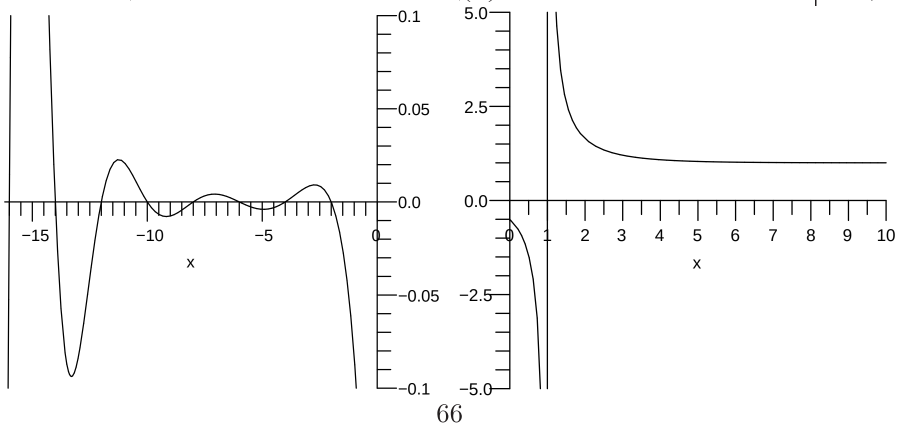
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}_* : \left| \begin{array}{l} B_k = -(-1)^k\, k\, \zeta(1-k) \\ B'_k = -k\, \zeta(1-k) \end{array} \right.}$$

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{C} : \ \zeta(s) = \frac{1}{s-1} - \sum_{k=1}^{\infty} [\zeta(s+k) - 1] \frac{s^{\overline{k}}}{(k+1)!}}$$

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(s) > 1 : \ \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n \in \mathbb{N}_*} \frac{\mu(n)}{n^s}}$$

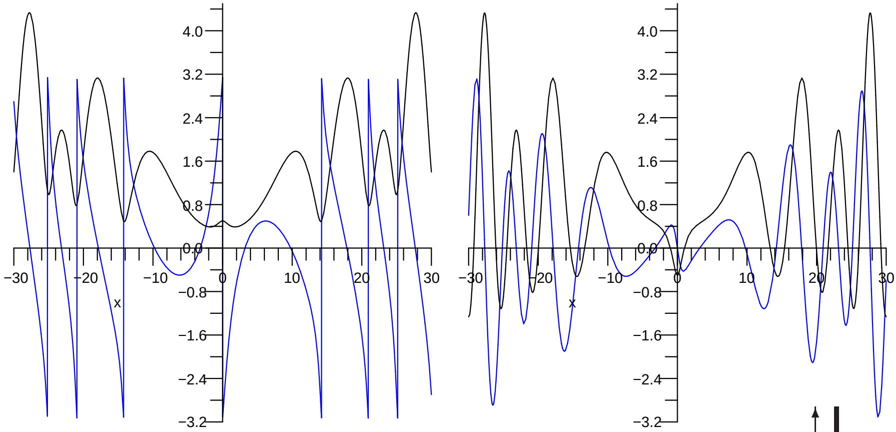
$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{s=2}^{\infty} [\zeta(s) - 1] = 1 \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{\infty} [\zeta(2s) - 1] = 3/4 \end{array}}$$

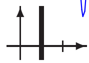
Allure de ζ sur la droite réelle $z = x$: $\zeta(x)$



Allure de ζ sur la droite imaginaire $z = ix$:

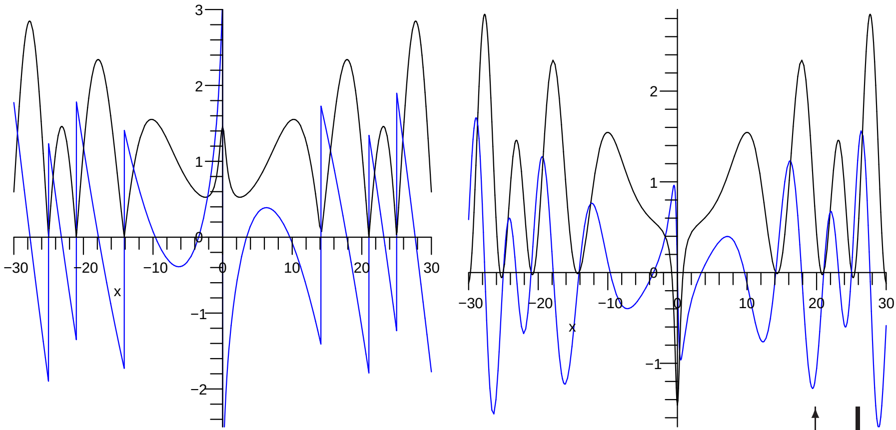
$|\zeta(ix)|$ et $\arg(\zeta(ix))$ $\qquad$ $\Re(\zeta(ix))$ et $\Im(\zeta(ix))$

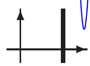




Allure de ζ sur la droite critique $z = 0,5 + ix$:

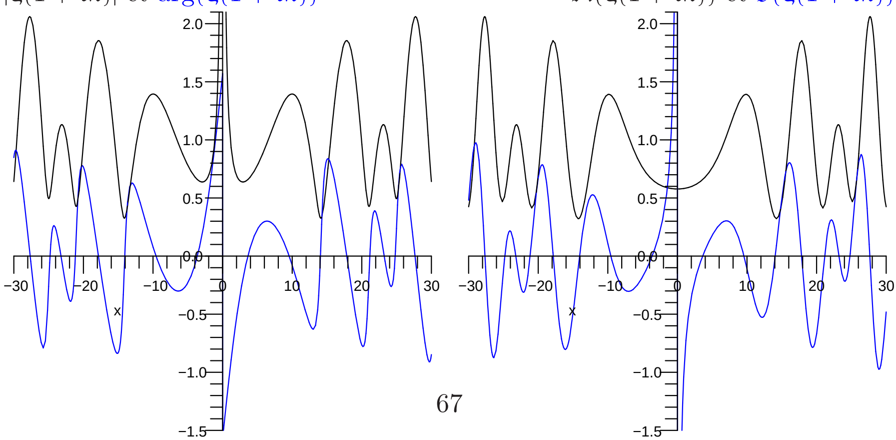
$|\zeta(0,5 + ix)|$ et $\arg(\zeta(0,5 + ix))$ $\qquad$ $\Re(\zeta(0,5 + ix))$ et $\Im(\zeta(0,5 + ix))$





Allure de ζ sur la droite $z = 1 + ix$:

$|\zeta(1 + ix)|$ et $\arg(\zeta(1 + ix))$ $\qquad$ $\Re(\zeta(1 + ix))$ et $\Im(\zeta(1 + ix))$



Annexes

Quantificateurs

$\forall x$: pour tout x, quelque soit x (sans exception) $\qquad \forall x = \neg\exists x\,\neg$

$\exists x$: il existe (au moins) un x $\qquad \exists x = \neg\forall x\,\neg$

$\overset{\infty}{\forall} x$: pour presque tout les x,
c.-à-d. pour tout x sauf un nombre fini d'exceptions $\qquad \overset{\infty}{\forall} x = \neg\,\overset{\infty}{\exists} x\,\neg$

$\overset{\infty}{\exists} x$: il existe une infinité de x $\qquad \overset{\infty}{\exists} x = \neg\,\overset{\infty}{\forall} x\,\neg$

$\exists! x$: il existe un et un seul x

$\exists? x$: existe-t-il (au moins) un x ?

Principe d'induction (démonstration par récurrence)

Soit une suite infinie de dominos : ☞▯▯▯▯▯▯▯▯▯▯▯▯▯▯ . . .

Si on admet que :

- le premier domino tombe
- si un domino tombe alors le domino suivant tombe

alors tous les dominos tombent.

$$\frac{P(0)\ \&\ \forall n[P(n) \to P(n+1)]}{\forall n\, P(n)}$$

Si je montre que :

- la propriété P est vraie pour 0
- si la propriété P est vraie pour n alors elle est vraie pour $n+1$

alors la propriété P est vraie pour tous les naturels.

À chaque instant, *presque tous* les dominos sont debouts.

(Le principe d'induction transcende la condamnation de Sisyphe, il transporte par-delà l'infini...)

Système de numération de position en base b

$$\forall b \in \mathbb{N}{+}2, \forall c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\} : \ \overline{c_k \ldots c_2 c_1 c_0}^{\,b} := \sum_{i=0}^{k} c_i b^i$$

"Pour savoir le nombre d'unités que représente chaque chiffre, on est obligé de le "lire" dans le sens contraire de la lecture traditionnelle. (Cette manière de lire est due au fait que les Arabes écrivent de droite à gauche ; et lorsque les commerçants du XIIIe siècle traduisirent les textes arabes, ils n'eurent pas le courage d'inverser l'écriture des nombres : pour eux qui découvraient cette nouvelle manière très astucieuse d'écrire, c'était peut-être déjà assez difficile à comprendre comme cela !" ([Autodidacte])

Ensembles de nombres

Ensemble des nombres naturels $\mathbb{N} := \{0,1,2,3,\dots\} = \{0\} \oplus \mathbb{N}_*$ [19]
Ensemble des nombres naturels non nuls $\mathbb{N}_* := \{1,2,3,\dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z} := -\mathbb{N}_* \oplus \mathbb{N} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$

Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} := \left\{\frac{n}{d} \,|\, n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}_*\right\}$

Ensemble des nombres réels $\mathbb{R} := \mathbb{Q} \oplus \{\text{nombre irrationnel}\}$

Ensemble des nombres complexes $\mathbb{C} := \{a + i.b \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ où $i^2 = -1$

Ensembles d'applications

Pour tout ensembles A et B, l'ensemble des applications (fonctions partout définies) de A dans B est noté $B^A := \{\text{application } A \longrightarrow B\}$

$\boxed{\#B^A = \#B^{\#A}}$ où $\#E :=$ le cardinal de l'ensemble E

$$\forall f \in B^A : \left| \begin{array}{ll} f \text{ est une fonction donc } \forall x, y \in A : f(x) \neq f(y) \Longrightarrow x \neq y & A \longrightarrow B \\ f \text{ est dite injective si } \forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y & A \overset{-}{\longrightarrow} B \\ f \text{ est partout définie donc } \forall x \in A, \exists y \in b : y = f(x) & \\ f \text{ est dite surjective si } \forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x) & A \twoheadrightarrow B \\ f \text{ est dite bijective si elle est injective et surjective} & A \overset{-}{\twoheadrightarrow} B \end{array} \right.$$

Applications composées :
$\forall f \in B^A, \forall g \in C^B, \forall x \in A : \ (g \circ f)(x) := g(f(x))$ et $g \circ f \in C^A$

Applications itérées :
Si $B \subseteq A$, $\forall f \in B^A, \forall k \in \mathbb{N}_* : \ f^k := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ $\qquad f^0 := id : \begin{array}{l} A \overset{-}{\twoheadrightarrow} A \\ x \longmapsto x \end{array}$

Si f est bijective, on dit que f est inversible.
Soit f^{-1} sa réciproque (son inverse).

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \ f^k := \begin{cases} \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}} & \text{si } 0 \leqslant k \\ \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{-k \text{ fois}} & \text{si } k \leqslant 0 \end{cases}$$

Si $(B,+)$ et $(B,.)$ sont des semi-groupes commutatifs :
Opérations externes :
$$\forall f \in B^A, \forall \alpha \in B, \forall x \in A : \left| \begin{array}{l} (\alpha + f)(x) = (f + \alpha)(x) := f(x) + \alpha \\ (\alpha.f)(x) = (f.\alpha)(x) := \alpha.f(x) \end{array} \right.$$

19. $A \oplus B := A \cup B$ avec de plus, sous-entendu, $A \cap B = \emptyset$

Opérations internes :

$\forall f, g \in B^A, \forall x \in A : \left| \begin{array}{l} (f+g)(x) := f(x) + g(x) \\ (f.g)(x) := f(x).g(x) \end{array} \right.$

Si $(A, +, .)$ et $(B, +, .)$ sont des anneaux commutatifs :

Applications affines :

$\forall f \in B^A$: f est dite affine si $\exists b, c \in B, \forall x \in A :\ f(x) = b.x + c$

$$\boxed{\forall f \in B^A :\ f \text{ est affine} \iff \forall x \in A :\ f(x) = [f(1) - f(0)]\,.x + f(0)}$$

Applications linéaires :

$\forall f \in B^A$: f est dite linéaire si $\exists b \in B, \forall x \in A :\ f(x) = b.x$

$$\begin{array}{|l|}\hline \forall f \in B^A : f \text{ est linéaire} \iff \forall x \in A :\ f(x) = f(1).x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \iff \forall \alpha, \beta, x, y \in A : f(\alpha.x + \beta.y) = \alpha.f(x) + \beta.f(y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \iff \left| \begin{array}{l} f \text{ est affine} \\ f(0) = \mathbf{0} \end{array} \right| \implies f(1).A = f(A) \subseteq B \\ \hline \end{array}$$

Applications périodiques :

$\forall f \in B^A, \forall \alpha \in A$: f est dite α-périodique si $\forall x \in A :\ f(x + \alpha) = f(x)$

$$\boxed{\forall f \in B^A : \left| \begin{array}{l} f \text{ est } 0\text{-périodique} \\ f \text{ est constante} \iff \forall \alpha \in A : f \text{ est } \alpha\text{-périodique} \end{array} \right.}$$

$\forall f \in B^A$: f est dite périodique si $\exists \alpha \in A \setminus \{0\} :\ f$ est α-périodique

Identités remarquables

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} :\ a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$\boxed{2(a^2 + b^2 + ab)^2 = a^4 + b^4 + (a + b)^4}$$

Identité de Brahmagupta :

$$\boxed{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2}$$

Identité des 4 carrés d'Euler :

$$\boxed{\begin{array}{l} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) \\ \quad = (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3)^2 \\ \quad + (a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2)^2 + (a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1)^2 \end{array}}$$

Identité de Lebesgue :

$$\boxed{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + (2ac + 2bd)^2 + (2ad - 2bc)^2}$$

Puissances factorielles montantes et descendantes : $x^{\overline{k}}$ et $x^{\underline{k}}$

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$:

la k^e puissance factorielle montante de x :

$$x^{\overline{k}} := \prod_{i=0}^{k-1} (x+i) = \underbrace{x(x+1)(x+2)\ \ldots\ (x+k-1)}_{k \text{ facteurs}} = \prod_{i=0}^{k-1} E^i\, \mathrm{id}(x)$$

la k^e puissance factorielle descendante de x :

$$x^{\underline{k}} := \prod_{i=0}^{k-1} (x-i) = \underbrace{x(x-1)(x-2)\ \ldots\ (x-k+1)}_{k \text{ facteurs}} = \prod_{i=0}^{k-1} E^{-i}\, \mathrm{id}(x)$$

$\forall k \in \mathbb{N}$: la factorielle de k : $k! := \prod_{i=1}^{k} i = 1.2.3.\ \ldots\ .k = 1^{\overline{k}} = k^{\underline{k}}$

[OEIS, A000142]

Le symbole de Pochhammer $(x)_k$ est parfois utilisé pour représenter $x^{\overline{k}}$ ou $x^{\underline{k}}$. Pochhammer l'a lui utilisé pour représenter $\binom{x}{k}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \left| \begin{array}{l} x^0 = x^{\overline{0}} = x^{\underline{0}} = 0! = 1! = 1 \\ x^1 = x^{\overline{1}} = x^{\underline{1}} = x \end{array} \right.}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{ll} \forall x \in \{-k+1, \ldots, -2, -1, 0\} : & x^{\overline{k}} = 0 \\ \forall x \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\} : & x^{\underline{k}} = 0 \end{array} \right.}$$

? $\forall k \in \mathbb{N}$: ?

$$\left| \begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, \ldots, k\} : & x^{\overline{-k}} := \frac{1}{(x-1)^{\underline{k}}} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-k)} \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-k, \ldots, -3, -2, -1\} : & x^{\underline{-k}} := \frac{1}{(x+1)^{\overline{k}}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+k)} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \forall x \in \mathbb{R}_* : & x^{-1} & = \frac{1}{x} \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : & x^{\overline{-1}} & = \frac{1}{x-1} \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : & x^{\underline{-1}} & = \frac{1}{x+1} \end{array}}$$

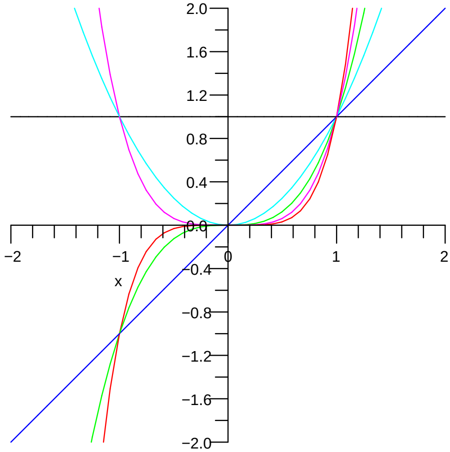
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z} : \left| \begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, \ldots, -k\} : & x^{\overline{k}} = (-1)^k (-x)^{\underline{k}} = (x+k-1)^{\underline{k}} \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k, \ldots, -3, -2, -1\} : & x^{\underline{k}} = (-1)^k (-x)^{\overline{k}} = (x-k+1)^{\overline{k}} \end{array} \right.}$$

? $$\boxed{\forall k, l \in \mathbb{Z} : \left| \begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, \ldots, -k-l\} : & x^{\overline{k+l}} = x^{\overline{k}} (x+k)^{\overline{l}} = (x+l)^{\overline{k}} x^{\overline{l}} \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k+l, \ldots, -3, -2, -1\} : & x^{\underline{k+l}} = x^{\underline{k}} (x-k)^{\underline{l}} = (x-l)^{\underline{k}} x^{\underline{l}} \end{array} \right.}$$?

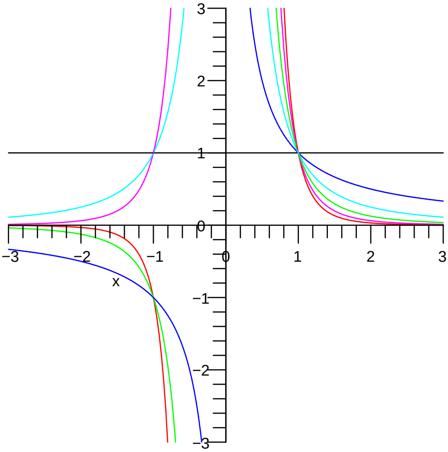
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} : \deg x^k = \deg x^{\overline{k}} = \deg x^{\underline{k}} = k}$$

? $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}_* : \sum_{i=0}^{n} i^{\underline{k}} = \sum_{i=0}^{n+1-k} i^{\overline{k}}}$$?

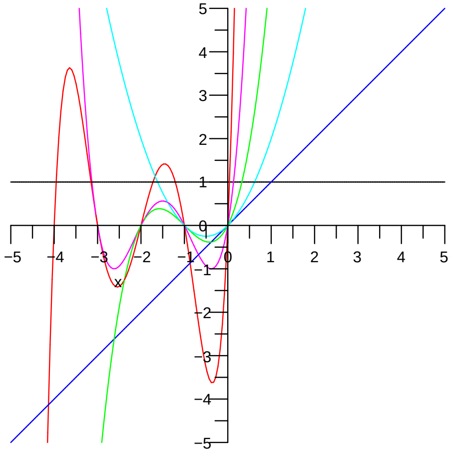
$1, x, x^2, x^3, x^4$ et x^5 :



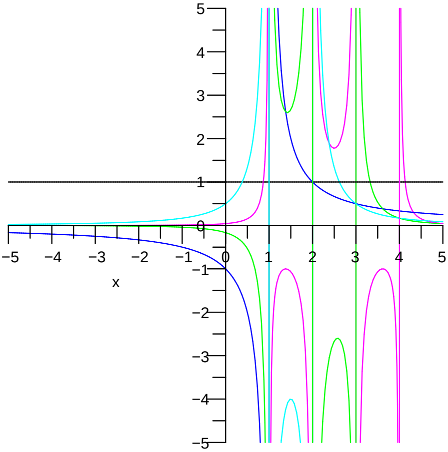
$1, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}$ et x^{-5} :



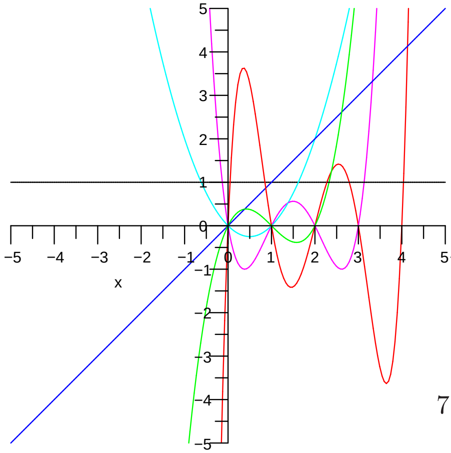
$1, x, x^{\overline{2}}, x^{\overline{3}}, x^{\overline{4}}$ et $x^{\overline{5}}$:



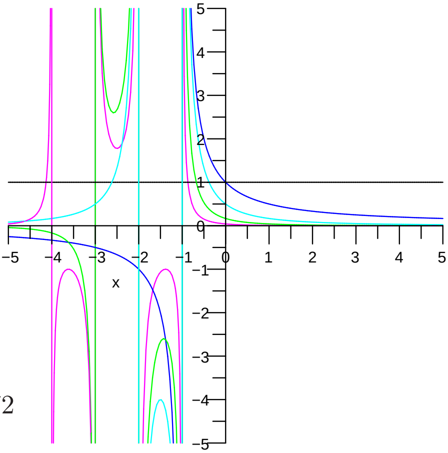
$1, x^{\overline{-1}}, x^{\overline{-2}}, x^{\overline{-3}}$ et $x^{\overline{-4}}$:



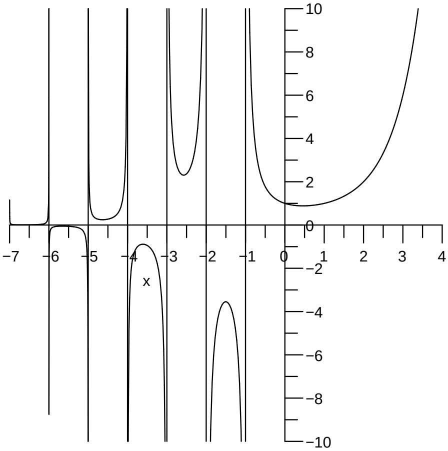
$1, x, x^{\underline{2}}, x^{\underline{3}}, x^{\underline{4}}$ et $x^{\underline{5}}$:



$1, x^{\underline{-1}}, x^{\underline{-2}}, x^{\underline{-3}}$ et $x^{\underline{-4}}$:



$x!$:



Coefficients binomiaux : $\binom{n}{k}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} : \ {\color{red}\binom{n}{k}} := \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

C'est le nombre de combinaisons (*sans* ordre)
de k objets choisis *sans* répétition parmi n objets.
Aussi noté ${\color{red}C_n^k}$.

Triangle de Pascal (déjà présent dans un ouvrage chinois datant de 1303)

$\binom{n}{0} = 1$ point

1 $\quad \binom{n}{1} = \mathbf{n}$ ligne

1 1 $\quad \binom{n}{2} = \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \frac{(n-1)n}{2} = t_{n-1}$ triangle

1 2 1 $\quad \binom{n}{3} = \frac{n^{\underline{3}}}{3!} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = T_{n-2}$ tétraèdre

1 3 3 1 $\quad \binom{n}{4} = \frac{n^{\underline{4}}}{4!} = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24} = {\color{red}\text{Pentatop}_{n-3}}$

1 4 6 4 1 $\quad \ddots$

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

…

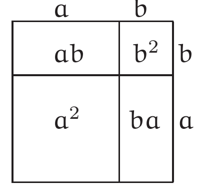
$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\dots$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1}$$

Formule d'addition :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z} : \ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

$$\binom{n-1}{k-1} \quad + \quad \binom{n-1}{k}$$
$$\binom{n}{k}$$



$$\boxed{\forall k,n \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \leqslant n : \text{ degré en } n \text{ de } \binom{n}{k} = k}$$

Binôme de Newton :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}}$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n = \int \binom{n}{\bullet} (n+1) \\ \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i = 2^{n-1} n = \int \left[\binom{n}{\bullet} \bullet \right] (n+1) \end{array} \right.}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}_* : \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0 = \int \left[(-1)^\bullet \binom{n}{\bullet} \right] (n+1) \\ \forall k,n \in \mathbb{N} : \\ (k \neq 0 = n \text{ ou } k < n \neq 0) \implies \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^k = 0 = \int \left[(-1)^\bullet \binom{n}{\bullet} \bullet^k \right] (n+1) \end{array}}$$

$$\boxed{\forall k,n \in \mathbb{N} : \ \binom{n+1}{k+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k}}$$

$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$	$\binom{n}{11}$	$\binom{n}{12}$	$\dots$
0	1													
1	1	1												
2	1	2	1											
3	1	3	3	1										
4	1	4	6	4	1									
5	1	5	10	10	5	1								
6	1	6	15	20	15	6	1							
7	1	7	21	35	35	21	7	1						
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1					
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1				
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1			
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1		
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	
$\vdots$														

Nombres de Stirling : $\left[{n \atop k} \right]$ et $\left\{ {n \atop k} \right\}$

? Nombres de Stirling de première espèce : $\left[{n \atop k} \right] :=$?

? Nombres de Stirling de deuxième espèce : $\left\{ {n \atop k} \right\} :=$?

$$\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1 \overset{(n \neq 0)}{=} \left\{ {n \atop 1} \right\}$$

$\left\{ {n \atop 0} \right\} = \left\{ {0 \atop n} \right\} = 0 \quad \text{si } n \neq 0$

$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} : \ x^k = \sum_{i=0}^{k} \left\{ {k \atop i} \right\} x^{\underline{i}} = \int \left(\left\{ {k \atop \bullet} \right\} x^{\underline{\bullet}} \right) (k+1)}$$

Liste des mathématiciens évoqués

$\sim -625 - \sim -547$: Thalès de Milet

$\sim -580 - \sim -500$: Pythagore de Samos

$-$IVᵉ $-$ $-$IIIᵉ : Euclide

après -150 – avant 350 (prob. IIᵉ – IIIᵉ) : Diophante d'Alexandrie

~ 200 – ? : Nicomaque de Gerasa

$\sim 370 - 415$: Hypatie

$598 - \sim 665$: Brahmagupta

$\sim 1170 - \sim 1250$: Leonardo Fibonacci (Léonard de Pise)

1550 – 1617 : John Napier ou Neper

1580 – 1635 : Johann Faulhaber

1581 – 1638 : Claude-Gaspard Bachet de Méziriac

1588 – 1648 : Marin Mersenne

1601 – 1665 : Pierre de Fermat

1623 – 1662 : Blaise Pascal

1642 – 1727 : Isaac Newton

1654 – 1705 : Jacques Bernoulli (Jakob, Jacob) (parfois Bernouilli)

1667 – 1748 : Jean Bernoulli (Johann) (frère de Jacques)

1692 – 1770 : James Stirling

1698 – 1746 : Colin Maclaurin

1700 – 1782 : Daniel Bernoulli (fils de Jean)

1707 – 1783 : Leonhard Euler http://www.math.dartmouth.edu/~euler/

1730 – 1783 : Étienne Bézout

1736 – 1798 : Edward Waring

1736 – 1813 : Louis, comte de Lagrange

1744 – 1807 : Jean Bernoulli (Johann) (neveu de Daniel)

1750 – 1800 : Lorenzo Mascheroni

1752 – 1833 : Adrien Marie Legendre

1768 – 1830 : Joseph Fourier
1777 – 1855 : Carl Friedrich Gauss
1790 – 1868 : August Ferdinand Möbius
1793 – 1880 : Michel Chasles
1804 – 1851 : Carl Jacobi
1826 – 1866 : Bernhard Riemann
1840 – 1927 : Franz Mertens
1841 – 1920 : Leo August Pochhammer
1862 – 1943 : David Hilbert
1875 – 1941 : Henri Lebesgue
1877 – 1947 : Godfrey Harold Hardy
1887 – 1920 : Srinivasa Ramanujan
1897 – 1954 : Emil Post
1903 – 1995 : Alonzo Church
1906 – 1978 : Kurt Gödel
1906 – 2005 : Edward Maitland Wright
1912 – 1954 : Alan Mathison Turing
1916 – 1994 : Roger Apéry
1937 – : John Horton Conway
1938 – : Donald Ervin Knuth http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/
1947 – : Yuri Matiyasevich (Matijasevitch) http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/
1953 – : Andrew John Wiles
1955 – : Bruno Marchal http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/
1962 – : Richard Taylor http://abel.math.harvard.edu/~rtaylor/
? – : Lars Kindermann http://reglos.de/

? – : Graeme Laurence Cohen, 1987
? – : Otto Grün, 1952
? – : Kevin George Hare, 2002, 2005
? – : Douglas Edward Iannucci, 1995, 2000
? – : P. M. Jenkins, 2003
? – : Wayne Lee McDaniel, 1967, 1970
? – : Pace Peterson Nielsen, 2003, 2006
? – : Karl Kenneth Norton, 1960/1961
? – ? : Modeste Stuyvaert, 1896, 1902
? – : Jacques Touchard, 1953
? – : Tomohiro Yamada, 2005

Références

[A Short Proof] George E. ANDREWS, Shalosh B. EKHAD, Doron ZEILBERGER, ***A Short Proof of JACOBI's Formula for the Number of Representations of an Integer as a Sum of Four Squares***[20]. arXiv, 3 juin 1992. 3 pages. 58

[Autodidacte] André DELEDICQ, René GAUTHIER, Ginette MISON, ***Autodidacte : Mathématiques***. Éditions Quillet, 1993–1994, 784 pages. 68

[Cours 2005] BrunoMarchal, Cours de logique et informatique théorique 2005 – ...[21] Forum CandiULB, 1er octobre 2005 – ...

[Universalis] **Encylopædia Universalis**[22] 10 PC/Mac, 2004. 3, 4, 5, 6, 7, 10, 13, 14, 15

[Intro Th Nombres] G.H. HARDY, E. M. WRIGHT, ***Introduction à la théorie des nombres***. {Traduction de l'anglais, François SAUVAGEOT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 5th edition, 1979.} Éd. Vuibert - Springer, Paris - Heidelberg, 2007. xiii+568 pages.

[OEIS] **L'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers**[23]. {*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.} 20, 21, 22, 31, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 46, 48, 49, 50, 53, 54, 55, 58, 64, 71

[Math Concrètes] Ronald L. GRAHAM, Donald E. KNUTH, Oren PATASHNIK, ***Mathématiques concrètes : Fondations pour l'informatique***. {Traduction de l'anglais, Alain DENISE, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science.* Ed. Addison Wesley, 1994.} Vuibert Informatique, Éd. Vuibert[24], Paris, 2003, deuxième édition. xiv +688 pages. 42

[Maple] Maple 10, MapleSoft[25], Waterloo Maple Inc.

[MathWorld] **MathWorld**[26]. 44, 54

[MusiNum] Lars KINDERMANN, **MusiNum** – The Music in the Numbers[27].

20. http://arxiv.org/abs/math.CO/9206203/
21. http://www.candiulb.be/forum/index.php?showtopic=23145
22. http://www.universalis.fr/
23. http://oeis.org/?language=french
24. http://www.vuibert.com/
25. http://www.maplesoft.com/
26. http://mathworld.wolfram.com/
27. http://reglos.de/musinum/

[Bound Odd Perfect] Kevin G. Hare,
New techniques for bounds on the total number of Prime Factors of an Odd Perfect Number [28].
arXiv, 12 avril 2006. 9 pages.

[Larousse]
Petit Larousse illustré 1987.
Paris, Librairie Larousse, 1986.

[Naturels] **Tables de naturels** [29] avec leur décomposition en facteurs premiers et les valeurs des fonctions $\pi, \omega, \Omega, \nu, \sigma, s, \varpi, GR, \varphi, \lambda, L, \mu, M\ldots$

[Mathematics Genealogy] **The Mathematics Genealogy Project** [30].

[Wikipédia] **Wikipédia** [31], l'encyclopédie libre. 17

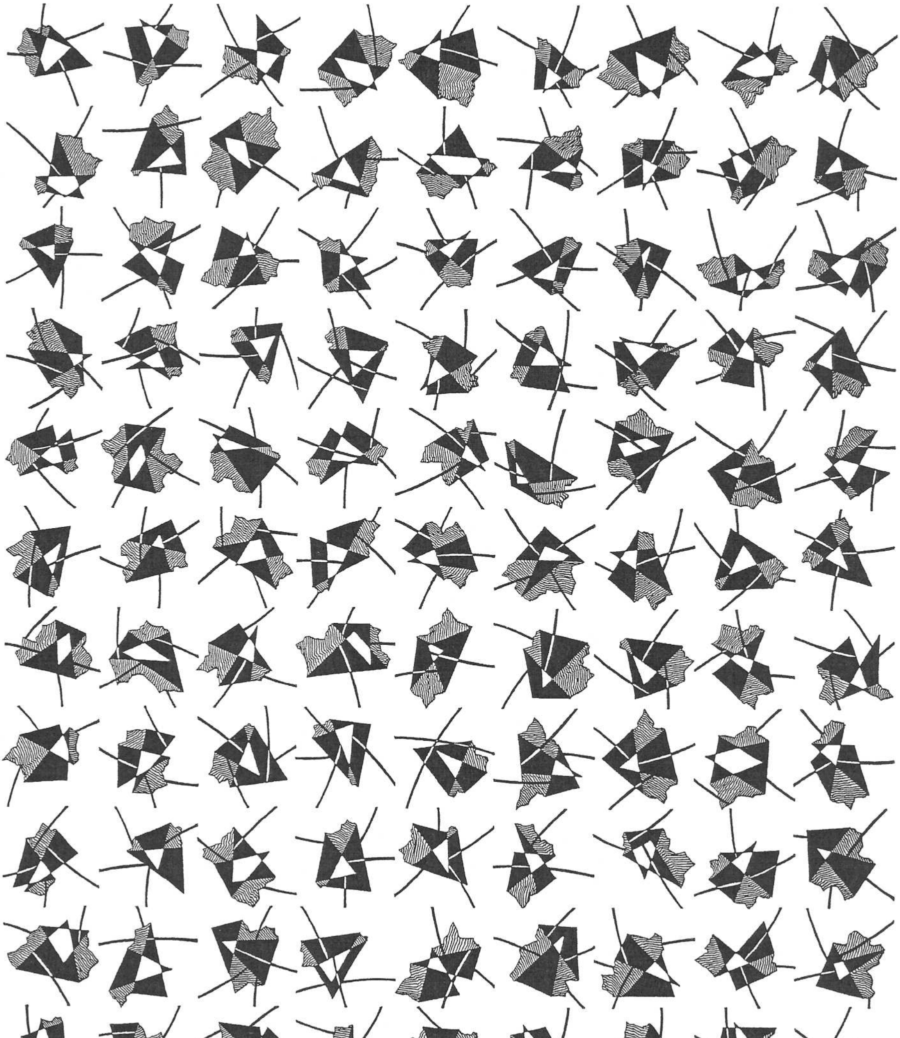
28. http://arxiv.org/abs/math.NT/0501070/
29. http://www.opimedia.be/naturels/
30. http://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/
31. http://fr.wikipedia.org/

Index

Table des matières

Alphabet grec :

A	α		alpha	
B	β		bêta	
Γ	γ	$\digamma$	gamma	`\digamma`
Δ	δ		delta	
E	ε	ϵ	`\varepsilon`	epsilon
Z	ζ		zêta	
H	η		êta	
Θ	θ	ϑ	thêta	`\vartheta`
I	ι		iota	
K	κ	$\varkappa$	kappa	`\varkappa`
Λ	λ		lambda	
M	μ		mu	
N	ν		nu	
Ξ	ξ		ksi (`\xi`)	
O	o		omicron	
Π	π	ϖ	pi	`\varpi`
P	ρ	ϱ	rhô	`\varrhoup`
Σ	σ	ς	sigma	`\varsigmaup`
T	τ		tau	
Υ	υ		upsilon	
Φ	φ	ϕ	`\varphi`	phi
X	χ		khi (`\chi`)	
Ψ	ψ		psi	
Ω	ω		oméga	



198. *Le chat de Schrödinger* (Daniel Lehman)

TEXtes

mis en page sous DSTeX
le 8 janvier 2012
http://www.opimedia.be/DS/