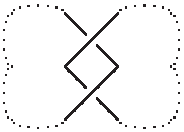
$\mathcal{L}$iens



Work in progress

Olivier Pirson
olivier_pirson_opi@yahoo.fr
http://www.opimedia.be/

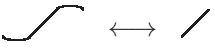
mercredi 17 mars 2010

1 Représentation de liens et liens

Considérons le plan contenant un nombre fini de courbes fermées telles que :
- en chaque point du plan passe au plus 2 courbes (interdit)
- les points sur lesquels passent 2 courbes sont séparés (interdit)
- lorsque 2 courbes passent sur un même point elles s'entrecroisent et indique laquelle passe au-dessus, comme ceci : ou (interdit).

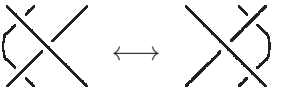
Appelons cela la représentation d'un lien.

1.1 Mouvements de Reidemeister

Mouvement 0 : 

Mouvement I :

Mouvement II :

et ? Mouvement III : et  et ?

Soit $\mathcal{L}_{\mathcal{P}} := {}^{\{\text{représentation d'un lien}\}}/_{\text{mouvement 0}}$
$\emptyset :=$ la représentation vide $\in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$

1.2 Isotopies

$\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$:

$K \sim L \overset{\triangle}{\iff}$ il existe une suite de mouvements 0, I, II et III qui transforme K en L (isotopie)

$K \simeq L \overset{\triangle}{\iff}$ il existe une suite de mouvements 0, II et III qui transforme K en L (isotopie régulière)

$\implies K \sim L$

$\sim$ et $\simeq$ sont des relations d'équivalences
(c.-à-d. réflexives, symétriques et transitives)

$\widetilde{K} := \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \mid L \sim K\} =$ un lien

$\widetilde{\widetilde{K}} := \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \mid L \simeq K\} =$ un ruban $\quad \subseteq \widetilde{K}$

$\widetilde{\widetilde{\emptyset}} = \widetilde{\emptyset} = \{\emptyset\}$
$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \setminus \{\emptyset\} : \ \widetilde{\widetilde{K}} \subset \widetilde{K}$

Ensemble des liens (links) : $\mathcal{L} := \{\widetilde{K} \mid K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}\}$

Ensemble des rubans (ribbons) : $\mathcal{R} := \{\widetilde{\widetilde{K}} \mid K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}\}$

2 Opérations

addition interne $+ : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \times \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \overset{\nearrow}{\longrightarrow} \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$

$(K, L) \longmapsto K + L :=$ le lien formé de K et L séparés

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall K, L, M \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ K + (L + M) = (K + L) + M & \text{(associatif)} \\ \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ K + \emptyset = K = \emptyset + K & \text{(neutre)} \\ \forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ K + L = L + K & \text{(commutatif)} \end{array}}$$

semi-groupe commutatif

multiplication externe $. : \mathbb{N} \times \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \overset{\nearrow}{\longrightarrow} \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$

$(n, K) \longmapsto n.K := \underbrace{K + \cdots + K}_{n}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : & 0.K = \emptyset \\ & 1.K = K \\ \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall m, n \in \mathbb{N} : & m.(n.K) = (mn).K \\ & (m + n).K = m.K + n.K \qquad \text{(distributif)} \\ \forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : & n.(K + L) = n.K + n.L \end{array}}$$

2.1 Nombre de cycles : $\|K\|$

$\|.\| : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \overset{\nearrow}{\longrightarrow} \mathbb{N}$

$K \longmapsto \|K\| :=$ nombre de cycles de K

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ \|K\| = 0 \iff K = \emptyset \\ \forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ \|K + L\| = \|K\| + \|L\| \\ \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : \ \|n.K\| = n.\|K\| \end{array}}$$

$$\boxed{\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ K \sim L \implies \|K\| = \|L\|}$$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ \|\widetilde{\widetilde{K}}\| := \|\widetilde{K}\| := \|K\|$

Ensemble des nœuds (knots) : $\mathcal{K} := \{\widetilde{K} \in \mathcal{L} \mid \|\widetilde{K}\| = 1\} \quad \subset \mathcal{L}$

$\mathcal{K}_{\mathcal{P}} := \{K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \mid \|K\| = 1\} \quad \subset \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$

Une représentation du nœud trivial : $\in \mathcal{K}_{\mathcal{P}}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ \|n.\,\text{}\| = n}$$

2.2 Nombre (minimal) de croisements : $\mathrm{M}(\mathsf{K})$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{M} : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} & \overset{?}{\longrightarrow} & \mathbb{N} \setminus \{1,2\} \\ \mathsf{K} & \longmapsto & \mathrm{M}(\mathsf{K}) := \min_{\mathsf{L} \in \widetilde{\mathsf{K}}} (\text{nombre de croisements de } \mathsf{L}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{M}(\emptyset) = 0 \\ \forall \mathsf{K}, \mathsf{L} \in \mathcal{L} : \ \mathrm{M}(\mathsf{K} + \mathsf{L}) = \mathrm{M}(\mathsf{K}) + \mathrm{M}(\mathsf{L}) \\ \forall \mathsf{K} \in \mathcal{L}, \forall n \in \mathbb{N} : \ \mathrm{M}(n.\mathsf{K}) = n.\,\mathrm{M}(\mathsf{K}) \end{array}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ \mathrm{M}(n.\bigcirc) = 0$$

$$\begin{array}{l} \forall \mathsf{K}, \mathsf{L} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \\ \quad \mathsf{K} \simeq \mathsf{L} \implies (\text{nb de croisements de } \mathsf{K}) \equiv (\text{nb de croisements de } \mathsf{L}) \ [2] \end{array}$$

$$\forall \mathsf{K}, \mathsf{L} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ \mathsf{K} \sim \mathsf{L} \implies \mathrm{M}(\mathsf{K}) = \mathrm{M}(\mathsf{L})$$

$$\forall \mathsf{K} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ \mathrm{M}(\widetilde{\widetilde{\mathsf{K}}}) := \mathrm{M}(\widetilde{\mathsf{K}}) := \mathrm{M}(\mathsf{K})$$

2.3 Miroir : K^*

$$\begin{array}{rcl} .^* : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \\ \mathsf{K} & \longmapsto & \mathsf{K}^* := \mathsf{K} \text{ dont tout les croisements sont “inversés”} \end{array}$$

$$\forall \mathsf{K} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \left| \begin{array}{l} (\mathsf{K}^*)^* = \mathsf{K} \\ \|\mathsf{K}^*\| = \|\mathsf{K}\| \\ \mathrm{M}(\mathsf{K}^*) = \mathrm{M}(\mathsf{K}) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \emptyset^* = \emptyset \\ \forall \mathsf{K}, \mathsf{L} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ (\mathsf{K} + \mathsf{L})^* = \mathsf{K}^* + \mathsf{L}^* \\ \forall \mathsf{K} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : \ (n.\mathsf{K})^* = n.\mathsf{K}^* \end{array}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ (n.\bigcirc)^* = n.\bigcirc$$

2.4 Degré de torsion : $\mathrm{w}(\mathsf{K})$

$$\forall \text{ croisement } \mathsf{c} : \varepsilon(\mathsf{c}) := \begin{cases} -1 & \text{si } \mathsf{c} = \text{ } \quad \text{ou} \quad \text{ } \\ 0 & \text{si } \mathsf{c} = \text{ } \quad \text{ou} \quad \text{ } \\ 1 & \text{si } \mathsf{c} = \text{ } \quad \text{ou} \quad \text{ } \end{cases}$$

$\forall$ croisement c de $\mathsf{K} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $\varepsilon(\mathsf{c}) = 0 \implies \begin{vmatrix} \|\mathsf{K}\| \geqslant 2 \\ \mathrm{M}(\mathsf{K}) \geqslant 2 \end{vmatrix}$

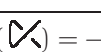
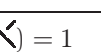
$\forall \mathrm{C}$ morceau d'élements de $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $\varepsilon(\mathrm{C}) := \sum_{\text{croisement } \mathsf{c} \text{ de } \mathrm{C}} \varepsilon(\mathsf{c})$

$\varepsilon(\mathrm{C}^*) = -\varepsilon(\mathrm{C})$

$\varepsilon($ $) = \varepsilon($ $) = \varepsilon($ $)$

$\varepsilon($ $) = -\varepsilon($ $) = 1$

$\varepsilon($ $) = \varepsilon($ $) = \varepsilon($ $) = \varepsilon($ $) = 0$

$\varepsilon($  $) = \varepsilon($  $)$

$\varepsilon($ $) = 3\varepsilon($ $)$

Degré de torsion (writhe) : $\forall \mathsf{K} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $\mathrm{w}(\mathsf{K}) := \varepsilon(\mathsf{K}) = \sum_{\text{croisement } \mathsf{c} \text{ de } \mathsf{K}} \varepsilon(\mathsf{c})$

$\mathrm{w}(\emptyset) = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{w}(n.$ $) = 0$

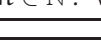
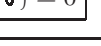
$\forall \mathsf{K}, \mathsf{L} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $\mathrm{w}(\mathsf{K} + \mathsf{L}) = \mathrm{w}(\mathsf{K}) + \mathrm{w}(\mathsf{L})$

$\forall \mathsf{K} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{w}(n.\mathsf{K}) = n.\,\mathrm{w}(\mathsf{K})$

$\forall \mathsf{K} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $\mathrm{w}(\mathsf{K}^*) = -\mathrm{w}(\mathsf{K})$

$\mathrm{w}($ $) - 1 = \mathrm{w}($ $) = \mathrm{w}($ $) + 1$

$\mathrm{w}($ $) = \mathrm{w}($ $) = \mathrm{w}($ $)$

$\mathrm{w}($  $) = \mathrm{w}($  $)$

$\forall \mathsf{K}, \mathsf{L} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $\mathsf{K} \simeq \mathsf{L} \implies \mathrm{w}(\mathsf{K}) = \mathrm{w}(\mathsf{L})$

$\forall \mathsf{K} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $\mathrm{w}(\widetilde{\mathsf{K}}) := \mathrm{w}(\mathsf{K})$

3 Invariant de Kauffman

3.1 Fonction en ABd de Kauffman : [K]

$[.] : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$ tel que $K \longmapsto [K]$

$\forall A, B, d \in \mathbb{C}$:

$[\emptyset] = 1$

$[K + \emptyset](A, B, d) = d.[K](A, B, d)$

$[\times](A, B, d) = A.[)(](A, B, d) + B.[\frown\frown](A, B, d)$

$[\times](A, B, d) = A.[\frown\frown](A, B, d) + B.[)(](A, B, d)$

$\forall n \in \mathbb{N} : \ [n.\bigcirc](A, B, d) = d^n$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : \ [K + n.\bigcirc](A, B, d) = d^n.[K](A, B, d)$

$\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ [K + L](A, B, d) = [K].[L](A, B, d)$

Démonstration, par récurrence sur le nombre de croisements de L
Si L ne contient pas de croisement
alors $L = \|L\|.\bigcirc$ et $[K + L] = d^{\|L\|}.[K] = [K].[L]$

Si L contient au-moins un croisement $\times$
alors $[K + \times] = A.[K +)(] + B.[K + \frown\frown]$
$= A.[K].[)(] + B.[K].[\frown\frown]$ (par hypothèse de récurrence)
$= [K].(A.[)(] + B.[\frown\frown]) = [K].[\times]$

De même si L ne contient que des croisements $\times$ □

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : \ [n.K](A, B, d) = [K]^n(A, B, d)$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ [K^*](A, B, d) = [K](B, A, d)$

Démonstration, par récurrence sur le nombre de croisements de K
Si K ne contient pas de croisement alors $K^* = K = \|K\|.\bigcirc$
et $[K^*](A, B, d) = d^{\|K\|} = [K](B, A, d)$

Si K contient au-moins un croisement $\times$
alors $[\times^*](A, B, d) = A.[\frown\frown^*](A, B, d) + B.[)(]^*(A, B, d)$
$= A.[\frown\frown](B, A, d) + B.[)(](B, A, d)$ (par hypothèse de récurrence)
$= [\times](B, A, d)$

De même si K ne contient que des croisements $\times$ □

$[\ \times\ ] = [\ \ ] = [\ \ ]$

Démonstration

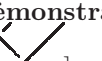
$A.[$ $] + B.[$ $] = A.[$ $] + B.[$ $]$ □

$[$ $](A,B,d) = (Ad+B).[$ $](A,B,d) = [$ $](B,A,d)$

$[$ $](A,B,d) = [$ $](A,B,d) = [$ $](A,B,d)$

$\iff \begin{vmatrix} B = 1-A \\ d = 1 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} B = A \neq 0 \\ d = A^{-1} - 1 \end{vmatrix}$

$[$ $](A,B,d) = (A^2 + ABd + B^2).[$ $](A,B,d) + AB.[$ $](A,B,d)$

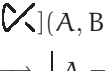
$= [$  $](A,B,d)$

$[$ $](A,B,d) = [$ $](A,B,d) = [$ $](A,B,d)$

$\impliedby \begin{vmatrix} A^2 + ABd + B^2 = 0 \\ AB = 1 \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} A \neq 0 \\ B = A^{-1} \\ d = -A^2 - A^{-2} \end{vmatrix}$

$\implies [$ $](A,B,d) = [$ $](A,B,d)$

Démonstration

$[$  $] = A.[$ $] + B.[$ $]$

$\overset{\text{(si invariant pour mouvement II)}}{=} A.[$ $] + B.[$ $]$

$\overset{\text{(si invariant pour mouvement II)}}{=} A.[$ $] + B.[$ $] = [$ $]$ □

$\begin{vmatrix} A \neq 0 \\ B = A^{-1} \\ d = -A^2 - A^{-2} \\ [$ $](A,B,d) = [$ $](A,B,d) = [$ $](A,B,d) \end{vmatrix}$

$\iff \begin{vmatrix} A = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ B = \frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2} \\ d = 1 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} B = A = -1 \\ d = -2 \end{vmatrix}$

Entiers d'Eisenstein ?
$\mathbb{Z} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\mathbb{Z}$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ [K](-1,-1,-2) = (-2)^{\|K\|}$

Démonstration, par récurrence sur le nombre de croisements de $K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$
Si K ne contient pas de croisement
alors $K = \|K\|.$ et $[K](-1,-1,-2) = (-2)^{\|K\|}$

Si K contient au moins un croisement
alors $[\times](-1,-1,-2) = [\times](-1,-1,-2) = -([\,)\,(\,] + [\,\smile\,])(-1,-1,-2)$
$= -((-2)^{\|\,)\,(\,\|} + (-2)^{\|\,\smile\,\|})$ (par hypothèse de récurrence)

- Si $[\times]$ alors $[\,)\,(\,]$ $+1$ cycle $\|\,)\,(\,\| = \|\times\| + 1$
  $[\,\smile\,]$ $\|\,\smile\,\| = \|\times\|$

donc $[\times](-1,-1,-2) = -((-2)^{\|\times\|+1} + (-2)^{\|\times\|}) = -(-2)^{\|\times\|}(-2+1)$
$= (-2)^{\|\times\|}$

- Si $[\times]$ alors $[\,)\,(\,]$ $\|\,)\,(\,\| = \|\times\|$

  $[\,\smile\,]$ $+1$ cycle $\|\,\smile\,\| = \|\times\| + 1$

donc $[\times](-1,-1,-2) = -((-2)^{\|\times\|} + (-2)^{\|\times\|+1}) = (-2)^{\|\times\|}$

- Si $[\times]$ alors $[\,)\,(\,]$ -1 cycle $\|\,)\,(\,\| = \|\times\| - 1$

  $[\,\smile\,]$ -1 cycle $\|\,\smile\,\| = \|\times\| - 1$

donc $[\times](-1,-1,-2) = -((-2)^{\|\times\|-1} + (-2)^{\|\times\|-1}) = (-2)^{\|\times\|}$ □

3.2 Fonction en A de Kauffman : $< K >$

$<.> : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C})$ tel que $\forall A \in \mathbb{C}_* : <K>(A) = \frac{[K](A, A^{-1}, -A^2-A^{-2})}{-A^2-A^{-2}}$
$K \longmapsto <K>$

$\boxed{<\emptyset>(A) = (-A^2 - A^{-2})^{-1}}$ $\boxed{<\,0\,> = 1}$

$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : <K + 0>(A) = (-A^2 - A^{-2}).<K>(A)}$

$$\boxed{\begin{array}{l} <\times>(A) = A.<\,)\,(\,>(A) + A^{-1}.<\,\smile\,>(A) \\ <\times>(A) = A.<\,\smile\,>(A) + A^{-1}.<\,)\,(\,>(A) \end{array}}$$ relations fondamentales de Kauffman

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : <n.0>(A) = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}}$

$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : <K + n.0>(A) = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}.<K>(A)}$

$\boxed{\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : <K + L>(A) = (-A^2 - A^{-2}).<K>.<L>(A)}$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : < n.K > (A) = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}. < K >^n (A)$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : < K^* > (A) = < K > (A^{-1})$

$-A^{-3}. <$ $> (A) = <$ $> (A) = -A^3. <$ $> (A)$

$<$ $> = <$ $> = <$ $>$

$<$ $> = <$ $>$

$\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ K \simeq L \implies < K > = < L >$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : < K > (-1) = (-2)^{\|K\|-1}$

3.3 Invariant de Kauffman : f_K

$f : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C})$ tel que $\forall A \in \mathbb{C}_* : \ f_K(A) = (-A^{-3})^{w(K)}. < K > (A)$
$K \longmapsto f_K$

$f_\emptyset(A) = (-A^2 - A^{-2})^{-1}$ $\qquad$ f $= 1$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ f_{K+}$ $(A) = (-A^2 - A^{-2}). < K > (A)$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ f_{K^*}(A) = f_K(A^{-1})$

$\forall K, L \in \mathcal{K}_{\mathcal{P}} : \ K \sim L \implies f_K = f_L$ $\quad$ f est un invariant de nœuds

Polynôme de Jones : $\forall K \in \mathcal{K}_{\mathcal{P}}, \forall t : \ V_K(t) = f_K(t^{-1/4})$

4 Divers

$\forall n \in \mathbb{N} : K =$ $\implies$
$[K](A, B, d) = (Ad + B)^n d$
$< K > (A) = (-1)^n A^{3n}$
$w(K) = n$
$f_K = 1$

$\forall n \in \mathbb{N} : K =$ $\implies$
$[K](A, B, d) = (A + Bd)^n d$
$< K > (A) = (-1)^n A^{-3n}$
$w(K) = -n$
$f_K = 1$

$\forall n \in \mathbb{N} : K =$

$\Longrightarrow$

$\|K\| = 2 - n\%2 = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

$[K](A, B, d) =$

$<K>(A) =$

$w(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

$f_K =$

$\forall n \in \mathbb{N} : K =$

$\Longrightarrow$

$\|K\| = 2 - n\%2 = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

$[K](A, B, d) =$

$<K>(A) =$

$w(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

$f_K =$

$\forall n \in 2\mathbb{N} :$

$K =$

$\Longrightarrow$

$K \stackrel{?}{=}$ le nœud premier $(n+2)_1$ si $n \geqslant 2$

$[K](A, B, d) =$

$<K>(A) =$

$w(K) = 2 - n$

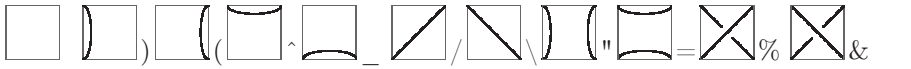
$f_K(A) =$

Annexes

Pièces élémentaires des liens

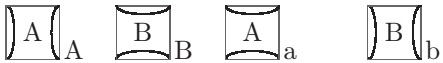
Les éléments utilisés par le module `knots.py` du paquetage DSPython [1] :

knots :



empty left right top bottom up down vert hori crossup crossdown

labelstates :



crossupA crossupB crossdownA crossdownB

universes :

cross

Table des premiers nœuds premiers

0_1 :

$[0_1](A,B,d) = d$
$< 0_1 > = f_{0_1} = 1$
$w(0_1) = 0$

$M(K)_{\text{invariant gourmand(K)}}$

3_1 :

$[3_1](A,B,d) = B^3d^2 + 3AB^2d + 3A^2Bd^2 + A^3d^3$
$< 3_1 > (A) = -A^{-5} - A^3 + A^7$
$w(3_1) = -3$
$f_{3_1}(A) = A^4 + A^{12} - A^{16}$

$*?$ 4_1 :

$[4_1](A,B,d) = B^4d^3 + 4AB^3d^2 + 5A^2B^2d$
$+A^2B^2d^3 + 4A^3Bd^2 + A^4d^3$
$< 4_1 > (A) = f_{4_1}(A) = A^{-8} - A^{-4} + 1 - A^4 + A^8$
$w(4_1) = 0$

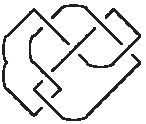
$*?$

5_1 :

5_2 :

$*?$ 6_1 :

6_2 :

6_3 : 

$*?$

7_1 :

...

$*?$ 8_1 :

...

$*?$

...

1. http://www.opimedia.be/DS/DSPython/

Algèbres

Soit K un corps

Algèbre de projecteurs de Jones :
J_2 avec $k \in K$: e_1, e_2

$$e_1^2 = e_1$$
$$e_2^2 = e_2$$
$$e_1 e_2 e_1 = k e_1$$
$$e_2 e_1 e_2 = k e_2$$

J_∞ avec $k \in K$: $e_1, e_2, e_3, \ldots$

$$e_i^2 = e_i$$
$$e_i e_{i\pm1} e_i = k e_i$$
$$e_i e_j = e_j e_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

Algèbre de Termperley-Lieb :
TL_n avec $\delta \in K$: $1, U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$

$$U_i^2 = \delta U_i$$
$$U_i U_{i\pm1} U_i = U_i$$
$$U_i U_j = U_j U_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

Groupe d'Artin :
B_n : $1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$
$(1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \sigma_3^{-1}, \ldots, \sigma_n^{-1})$

$$\sigma_i \sigma_{i\pm1} \sigma_i = \sigma_{i\pm1} \sigma_i \sigma_{i\pm1}$$
$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

Références

[Cours 2005] BrunoMarchal,
Cours de logique et informatique théorique 2005 – . . . [2]
Forum CandiULB, 1er octobre 2005 – . . .

[Pour la Science] ***La science des nœuds***, Pour la Science [3] HS15, avril 1997.

[Jones] Vaughan Jones,
Flatland, un bel endroit pour faire de l'algèbre [4].
Les grandes conférences de l'École normale supérieure, 27 mars 2007.
À la recherche d'un nœud à polynôme trivial. 28 mars 2007.
Les sous-facteurs : une théorie de Galois enrichie. 29 mars 2007.

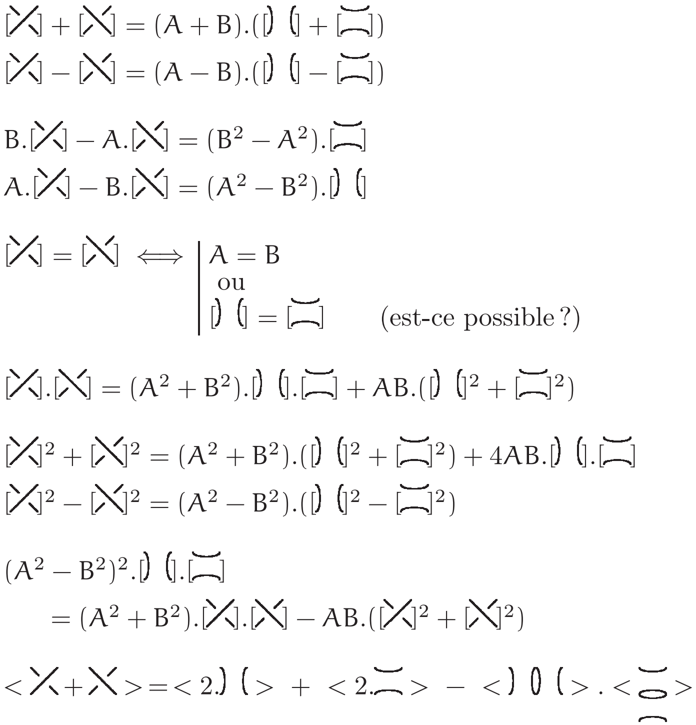
[Kauffman] Louis H. Kauffman [5]

[Dehornoy] Patrick Dehornoy [6]

2. http://www.candiulb.be/forum/index.php?showtopic=23145
3. http://www.pourlascience.com/
4. http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=1705
5. http://www2.math.uic.edu/~kauffman/
6. http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy/

Chutier

$-K = ?$ $\qquad [-K] = [K]^{-1}$ $\qquad \forall n \in \mathbb{Z} : \left| \begin{array}{l} [n.\bigcirc] = d^n \\ [n.K] = [K]^n \end{array} \right.$



$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

σ = un état labellisé du lien K

$M_A(\sigma)$:= nombre de "croisements A gagnant" de σ
$M_B(\sigma)$:= nombre de "croisements B gagnant" de σ

$< K \,|\, \sigma >$:= produit des labels A et B pour l'état $\sigma = A^{M_A(\sigma)} B^{M_B(\sigma)}$

$$< K > = \sum_{\text{état labellisé } \sigma} < K \,|\, \sigma > d^{\|\sigma\| - 1}$$

$$< K > = \sum_{\text{état labellisé } \sigma} A^{M_A(\sigma) - M_B(\sigma)} (-A^2 - A^{-2})^{\|\sigma\| - 1}$$

$\deg(< K \,|\, \sigma >, AB) = M(K)$
$< KK' \,|\, \sigma\sigma' > = < K \,|\, \sigma > . < K' \,|\, \sigma' >$

Quand est-ce que $< K > = < L >$?

Si $\varepsilon($ $) = 1$ alors $= A.$ $+ B.$

$\stackrel{?}{=} (Ad + B).$

$\stackrel{?}{=} (A + Bd^{-1}).$

Nœud produit (ou composé) : $K\#L$

$K\#$ $= K =$ $\#K$

$K\#L =$ $\implies K = L =$

Index

#, 14
., 2
~, 1
    ≃, 1
+, 2

[K], 5
<K>, 7
∅, 1
B_n, 11
ε(C), 4
    ε(c), 3
f_K, 8
J_2, 11
    J_∞, 11
$\mathcal{K}$, 2
    $\mathcal{K}_\mathcal{P}$, 2
K^*, 3
$\widetilde{K}$, 1
    $\widetilde{\widetilde{K}}$, 1
$|\widetilde{K}|$, 2
    $|\widetilde{\widetilde{K}}|$, 2
$\mathcal{L}$, 2
    $\mathcal{L}_\mathcal{P}$, 1
M(K), 3
    $M(\widetilde{K})$, 3
    $M(\widetilde{\widetilde{K}})$, 3
$M_A(\sigma)$, 13
    $M_B(\sigma)$, 13
$\mathcal{R}$, 2
σ, 13
TL_n, 11
$V_K(t)$, 8
w(K), 4
    $w(\widetilde{\widetilde{K}})$, 4

addition interne, 2

degré de torsion, 4

ensemble
    des liens, 2
    des nœuds, 2
    des représentations des liens, 1

isotopie, 1
    régulière, 1

lien, 1

mouvement
    0, 1
    I, 1
    II, 1
    III, 1
multiplication externe, 2

nœud
    miroir, 3
    produit, 14
    trivial, 2

polynôme
    de Jones, 8

représentation
    d'un lien, 1
    vide, 1
ruban, 1

Table des matières

1 Représentation de liens et liens **1**
1.1 Mouvements de Reidemeister 1
1.2 Isotopies 1

2 Opérations **2**
2.1 Nombre de cycles 2
2.2 Nombre (minimal) de croisements 3
2.3 Miroir 3
2.4 Degré de torsion 3

3 Invariant de Kauffman **5**
3.1 Fonction en ABd de Kauffman 5
3.2 Fonction en A de Kauffman 7
3.3 Invariant de Kauffman 8

4 Divers **8**

Annexes **10**
Pièces élémentaires des liens 10
Table des premiers nœuds premiers 10
Algèbres 11

Références **12**

Chutier **13**

Index **15**

Table des matières **16**

@TEXtes

mis en page sous DS-TEX
le 8 janvier 2012
http://www.opimedia.be/DS/