

# Logiques

$\top$  : le **vrai**, 1

$\perp$  : le **faux**, 0 (ex. : "0 = 1")

$p, q, r, \dots$  : les variables propositionnelles

$A, B, C, \dots$  : les formules (expressions bien formées)

$\neg A$  : la **négation** de  $A$

$A \rightarrow B$  : l'**implication**,  $A$  implique  $B$  =  $\neg A \vee B$  (aussi noté  $\Rightarrow$ )

$A \leftrightarrow B$  : l'**équivalence**, si et seulement si (aussi noté  $\iff$ , ssi)

$A \wedge B$  : la **conjonction**,  $A$  **et**  $B$  (aussi noté  $\&$ )

$A \vee B$  : la **disjonction**,  $A$  **ou** (inclusif)  $B$

$\forall x P(x)$  : quantificateur universel, **pour tout**  $x$  qui vérifie  $P$  =  $\neg \exists x \neg P(x)$

$\exists x P(x)$  : quantificateur existentiel, **il existe**  $x$  qui vérifie  $P$  =  $\neg \forall x \neg P(x)$

$\trianglelefteq$  : ssi par définition

A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
$\neg A$	1		0	
$A \rightarrow B$	1	1	0	1
$A \leftrightarrow B$	1	0	0	1
$A \wedge B$	0	0	0	1
$A \vee B$	0	1	1	1

	formules vraies ( $\models F$ )	formules fausses
formules démontrables ( $\vdash F$ )	<b>axiomes</b> démonstration de F	<b>correction</b> ssi case vide (ce qui est démontrable est vrai)
formules indémonstrables	<b>complétude</b> ssi case vide (ce qui est vrai est démontrable)	

$F$  alors  $\neg F$   
**consistance** (tiers exclu, pas de contradiction)

## Logiques modales

$\Box A$  : nécessité, prouvabilité, croyance =  $\neg \Diamond \neg A$

$\Diamond A$  : possibilité, consistance =  $\neg \Box \neg A$

$\Box A$  : connaissabilité =  $\Box A \wedge A$

$\Box A$  : observabilité =  $\Box A \wedge \Diamond A$

$\Box A$  : sensibilité =  $\Box A \wedge \Diamond A \wedge A$

$\Box A$	$\neg \Diamond A$
$\neg \Diamond \neg A$	$\Box \neg A$
<b>nécessaire</b>	<b>impossible</b>
$\Diamond A$	$\neg \Box A$
$\neg \Box \neg A$	$\Diamond \neg A$
<b>possible</b>	<b>contingent</b>

## Ensembles de nombres

$\mathbb{P}$  : l'ensemble des nombres premiers  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, \dots\}$

$\mathbb{N}$  : l'ensemble des nombres **naturels**  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$  : l'ensemble des nombres **entiers** (relatifs)  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$  : l'ensemble des nombres **rationnels**  $\{n/d \mid n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}_*\}$  (les fractions)

$\mathbb{R}$  : l'ensemble des nombres **réels** (les rationnels "complétés" des irrationnels)

$\mathbb{C}$  : l'ensemble des nombres **complexes**  $\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  où  $i^2 = -1$

Avec une  $*$ , on exclut le 0. Par ex. :  $\mathbb{N}_* = \{1, 2, 3, \dots\}$

## Fonctions

$f : A \rightarrow B$  (**fonction** de l'ensemble  $A$  dans l'ensemble  $B$ )

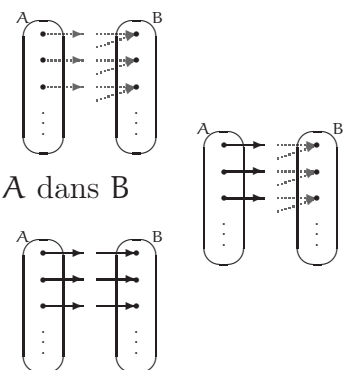
$x \mapsto f(x)$

$B^A$  : ensemble des **applications** (**fonctions totales**, partout définies) de  $A$  dans  $B$

Une **bijection** de  $A$  dans  $B$  est une application

**injective** (un élément de  $B$  ne peut être atteint que par une seule flèche)

et **surjective** (tous les éléments de  $B$  sont atteints)



## Programmes

0 1 2 3 ... énumération des naturels

$\downarrow$  bijection

$P_0 P_1 P_2 P_3 \dots$  énumération des programmes (dans le langage universel choisi)

$\downarrow$  surjection

$\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \dots$  énum. des fonctions calculables ( $\varphi_i$  = fonction calculée par le programme  $P_i$ )

$\downarrow$  surjection

$W_0 W_1 W_2 W_3 \dots$  énum. des ensembles récursivement énumérables ( $W_i = \text{dom } \varphi_i$ )