La "théologie" de la machine universelle et l'origine de la conscience et du libre examen

Séminaire donné par

Bruno Marchal [1]

2009 – 2010 (IRIDIA/ CEΨ [2])

Notes d'Olivier Pirson

olivier_pirson_opi@yahoo.fr

http://www.opimedia.be/

dimanche 1er août 2010

1. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/
2. http://www.ulb.ac.be/cepsy/

Note d'introduction au séminaire

"Nous poursuivrons cette année l'étude de la logique de l'auto-référence de Gödel - Löb - Solovay (*). Nous consacrerons encore un certain temps sur son impact dans les sciences de la nature, mais nous aborderons enfin son impact et sa possible importance dans les sciences humaines. Nous examinerons une origine possible du libre examen, et illustrerons que la "théologie" des machines pourrait justifier la *pratique* du libre examen sur base d'un principe d'économie de temps et d'espace pour des familles de machines universelles pratiquant l'inférence inductive ou l'apprentissage.

(*) Références principales :

- Gödel, K. (1931). *Über formal unentscheidbare sätze der principia mathematica und verwandter systeme i.* Monatsh., Math. Phys., 38 :173-198. Traduction américaine dans Davis 1965, page 5+. (Davis, M., editor (1965). The Undecidable. Raven Press, Hewlett, New York. Publié aussi par Dover 2004.).
- Löb, M. H. (1955). *Solution of a problem of Leon Henkin.* Journal of Symbolic Logic, 20 :115-118.
- Solovay, R. M. (1976). *Provability Interpretation of Modal Logic.* Israel Journal of Mathematics, 25 :287-304."

(Bruno Marchal)

À propos de ce document

Ne vous fiez pas à l'aspect propret de ce carnet. Son contenu est une succession de notes brouillonnes (prises lors du séminaire de Bruno Marchal), souvent incomplètes et non retravaillées.

Le tout n'engage que moi, et est livré tel quel, sans garantie.

Olivier Pirson

1 Samedi 7 novembre 2009 : Introduction

2 Samedi 14 novembre 2009

“une athée, Carolyn Porco qui est aussi une scientifique bien reconnue par ses pairs (elle a dirigé la mission spatiale Cassini d’exploration de Saturne), reconnaît publiquement que la science est agnostique, et que l’athéisme est une religion.

Dans la vidéo elle est introduite par Richard Dawkins, un athée prolifique qui est parvenu à me faire réaliser que l’athéisme est vraiment une variante du christiannisme (même obsession sur le même “Dieu”, et total évacuation des questions théologiques non résolues et qui datent de l’ère pré-chrétienne).

Notons que l’argument donné par Carolyn Porco est le même, quasi mot pour mot, que celui développé dans l’introduction de “conscience et mécanisme”[1].

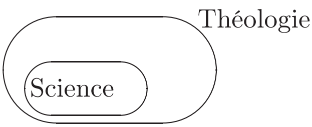
http://c0116791.cdn.cloudfiles.rackspacecloud.com/Carolyn-AAI09-720-web.mov

Vous remarquerez aussi que plus loin dans la vidéo, elle qualifie, à deux reprises, la science de “quest for the truth”. Ce qui est, selon moi, mais aussi Hirchberger (un spécialiste de philosophie antique) un “aveu de théologienne platonicienne”, ou Dieu est “seulement” la vérité, et la science le moyen de s’en approcher. Il s’agit bien de la vérité qu’on cherche, pas celle qu’on trouve ou communique.

Comme vous le savez, je pense que “la science” est totalement agnostique. Elle ne postule des existences que dans le cadre de théories, elles-même jugées toujours hypothétiques. Cela vaut pour Dieu, le moteur premier ou la matière primitive (d’Aristote).

Je pense que dans le cadre de la recherche fondamentale, c’est un point capital à toujour avoir à l’esprit.”

(Bruno Marchal, extrait d’un mail)



La signification, le sens, est dans la théologie.

Commentaire personnel

Pour moi, le sens d’une “chose” est un lien établi vers une autre qui *est supposée avoir* du sens.

---

1. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/bxlthesis/consciencemecanisme.html

« la croyance qui nie la science est déjà de mauvaise foi. »

Commentaire personnel

C'est un jugement de valeur qui ne se justifie rationnellement que dans le cadre idoine.

« Le fait que l'on ait pu créer un ordinateur est une preuve que l'environnement est universel. »

Commentaire personnel

Un ordinateur (concret) n'est que *potentiellement* une machine universelle.

---

objectif $\equiv$ doute
subjectif $\equiv$ ce dont on ne doute pas

G : Dieu existe $\qquad$ M : la matière existe
Agnostique : $\neg\Box G \ \wedge\ \neg\Box\neg G \quad (\wedge\ \neg\Box M\ \wedge\ \neg\Box\neg M)$
Athée : $\Box\neg G \quad (\wedge\ \Box M)$

Aristotélisme : l'idée qu'il y a un univers physique.

3 Samedi 21 novembre 2009 : [Absent]

4 Samedi 28 novembre 2009

I (logique intuitionniste)
$\simeq$ CL (logique classique) sans le principe du tiers exclu : $A \vee \neg A$

Douglas Bridge a écrit un traité d'analyse basée sur la logique intuitionniste.

$[A \to (B \to C)] \quad \leftrightarrow \quad [(A \wedge B) \to C]$

$[K]\ \Box(A \to B) \longrightarrow (\Box A \to \Box B)$
$\leftrightarrow \quad [\Box A \wedge \Box(A \to B)] \longrightarrow \Box B$

La logique G est autoréférentiellement correcte car
$\quad G \vdash \Box A \quad \Longrightarrow \quad G \vdash A$

5 Samedi 5 décembre 2009

$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{V}(\ulcorner p \urcorner) \leftrightarrow p$
$\mathrm{PA} \vdash k \leftrightarrow \neg \mathrm{V}(\ulcorner k \urcorner)$

Commentaire personnel

Quel peut bien être le sens de la Vérité si ce n'est un "juste lien" avec ce qui est !

$$\left.\begin{array}{l} G \nvdash \\ G^* \vdash \end{array}\right| (\Box p \wedge p) \leftrightarrow \Box p$$

? Machine loebienne : ?

- Axiomes du calcul propositionnel
- Axiomes arithmétiques
- Axiomes de G
- Règle d'inférence [MP]

(La machine est autoréférentiellement correcte.)

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

$[\Box A \wedge \Box(A \to B)] \to \Box B$ $\quad$ ($\leftrightarrow$ [K] car $[A \to (B \to C)] \leftrightarrow [(A \wedge B) \to C]$)

6 Samedi 12 décembre 2009

Dans G* :
$\Box A \to A$ pour chaque A, donc $\Box \bot \to \bot$ ($\iff \neg \Box \bot \iff \Diamond \top$)

Si on ajoutait [NEC] dans G* :
$$\cfrac{\cfrac{\Box \bot \to \bot}{\Box(\Box \bot \to \bot)} \qquad \Box(\Box \bot \to \bot) \to \Box \bot \quad [L]}{\cfrac{\Box \bot}{\bot \qquad \text{KO}}}$$

Mais la règle d'inférence de possibilitation [POS] $\dfrac{A}{\Diamond A}$ fonctionne dans G*

$$G \vdash A \implies \left| \begin{array}{l} G \vdash \Box A \implies G^* \vdash \Box A \\ G^* \vdash A \end{array}\right.$$

$$\exists A : \left| \begin{array}{l} G^* \nvdash A \implies G \nvdash A \\ G^* \vdash \Box A \end{array}\right.$$

Commentaire personnel

$\exists ?\, A : \left| \begin{array}{l} G \nvdash A \\ G^* \vdash A \quad \Longrightarrow \quad G^* \vdash \Box A \end{array} \right.$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots \\ A\end{array}}{\Box A \to A} \qquad \text{car} \quad \frac{\begin{array}{c}\vdots \\ A\end{array}}{B \to A} \quad \text{dans le calcul propositionnel}$$

Réalisation arithmétique :

p

q $\quad \forall x \exists y (x + y = 0)$

r $\quad$ toutes les formules fermées de l'arithmétique standard

$\vdots$

$\Box\, [\forall x \exists y (x + y) = 0] \to [\forall x \exists y (x + y) = 0]$

$\Box p \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Bew}(\ulcorner p \urcorner)$

$\mathrm{Bew}(\ulcorner \forall x \exists y (x + y) = 0 \urcorner) \to [\forall x \exists y (x + y) = 0]$

$\forall x\, [\mathrm{Bew}(x) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(x) \urcorner)]$

$\forall x (\Box x \to \Box\Box x)$

G est Σ_0

G_q := G étendu au premier ordre $\qquad$ (G quantifié)

G_q est Π_1-complet (c.-à-d. tous les problèmes Π_1 sont réductibles à G_q)

G_q^* := G^* quantifié = G_q étendu à la manière de G^* par rapport à G

G_q^* est Π_2-complet en l'oracle V (le Un, $= \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \ldots$)

The Unprovability of Consistency: An Essay in Modal Logic (Boolos, 2009, 1979)

The logic of provability (Boolos, 1995, 1993)

7 Samedi 9 janvier 2010 : Réel

Commentaire personnel

Plutôt que de *réalité consensuelle* on devrait parler d'*idée consensuelle de la réalité.*

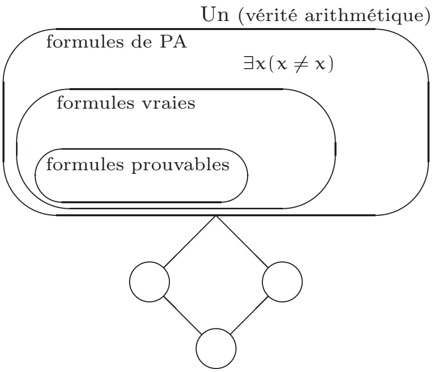
---

8 Samedi 16 janvier 2010

Cerveau de Ned ≃Block : on demande à chaque chinois de simuler un neurone.

Être modeste : $\dfrac{\mathrm{Bew}(\ulcorner p \urcorner) \to p}{p}$

Savoir qu'elle est modeste : $\vdash \Box\,(\Box p \to p) \to \Box p$ (formule de Löb)



9 Samedi 23 janvier 2010

Max Tegmark, John Wheeler, ≃Schmidhuber, Bruno Marchal

Commentaire personnel

L'*histoire* que l'on se fait du monde est une fiction.

Est-ce que le fond du problème du corps et de l'esprit n'est pas de permettre le "libre arbitre" dans un contexte déterminisme ? Et si le soubassement de ce contexte est "aléatoire"...

10 Samedi 30 janvier 2010 : Syntaxe du calcul propositionnel

Calcul propositionnel : cf. [Abrégé Logique]

Autres schéma d'axiomes avec l'alphabet $\{p, q, r, \ldots, \neg, \to, (,)\}$ et le [MP] :

[α] $A \longrightarrow (B \to A)$

[β] $[A \to (B \to C)] \longrightarrow [(A \to B) \to (A \to C)]$

$[\gamma'] \; (\neg A \to \neg B) \longrightarrow [(\neg A \to B) \to A]$

Schéma d'axiomes (Kleene 1952) avec l'alphabet $\{p, q, r, \ldots, \neg, \to, \wedge, \vee, (,)\}$ et le [MP] :

1. $\neg A \longrightarrow (A \to B)$
2. $[\alpha] \; A \longrightarrow (B \to A)$
3. $(A \to B) \longrightarrow [(\neg A \to B) \to B]$
4. $[\beta] \; [A \to (B \to C)] \longrightarrow [(A \to B) \to (A \to C)]$
5. $A \longrightarrow [B \to (A \wedge B)]$
6. $(A \wedge B) \longrightarrow A$
7. $(A \wedge B) \longrightarrow B$
8. $A \longrightarrow (A \vee B)$
9. $B \longrightarrow (A \vee B)$
10. $[(A \vee B) \wedge \neg A] \longrightarrow B$

Ces axiomes sont indépendants.

11 Samedi 6 février 2010 : Sémantique du calcul propositionnel

Une interprétation est une application : $\mathcal{P} \longrightarrow \{0, 1\}$.

Un modèle est une application : $\mathcal{F} \longrightarrow \{0, 1\}$
(donc une interprétation qui donne une valeur à chaque formule).

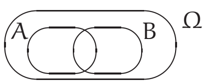
$\exists x \, P(x)$ est équivalent à $p_1(x) \vee p_2(x) \vee p_3(x) \vee \ldots p_k(x)$
ou $p_1(x) \vee p_2(x) \vee p_3(x) \vee \ldots$

$\forall x \, P(x)$ est équivalent à $p_1(x) \wedge p_2(x) \wedge p_3(x) \wedge \ldots p_k(x)$
ou $p_1(x) \wedge p_2(x) \wedge p_3(x) \wedge \ldots$

12 Samedi 13 février 2010 : Sémantique algébrique

$\models [A \to (A \to B)] \longleftrightarrow (A \to B)$

Sémantique algébrique de la logique classique :



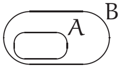
$[\![A]\!]$
$[\![A \wedge B]\!] = [\![A]\!] \cap [\![B]\!]$
$[\![A \vee B]\!] = [\![A]\!] \cup [\![B]\!]$

$[\![\neg A]\!] = \Omega \setminus [\![A]\!] = [\![\overline{A}]\!]$
$[\![A \to B]\!] = [\![\neg A \vee B]\!] = [\![\overline{A}]\!] \cup [\![B]\!]$
$[\![\top]\!] = \Omega$ $\qquad\qquad$ $[\![\bot]\!] = \emptyset$

Une logique modale possédant une sémantique de Kripke
$\Longrightarrow$ possède une sémantique algébrique

(Pour la logique intuitionniste : espace topologique.
$\overline{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.)
(Pour la logique quantique : espace vectoriel, espace de Hilbert.)

Sémantique de la déduction :

$\dfrac{A}{B}$ 

Règle de monotonie $\dfrac{A \vdash B}{\Box A \vdash \Box B}$

$\vdash F \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ F est un théorème
$\models F \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ F est une tautologie pour la sémantique bivalente
$\models_a F \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ F est une tautologie pour la sémantique algébrique

$\boxed{\models F \Longleftrightarrow \models_a F}$

Correction (*soundness*)

$\boxed{\vdash A \Longrightarrow \models A}$ (Un théorème est une tautologie)

Complétude

$\boxed{\models A \Longrightarrow \vdash A}$ (Une tautologie est un théorème)

13 Samedi 20 février 2010 : Mécanisme

Mécanisme digital indexical (ou computationnalisme) : hypothèse selon laquelle nous sommes des machines, nous sommes Turing émulable
= yes doctor + thèse de church

Autres mécanismes :
- *strong AI* : hypothèse selon laquelle il existe des machines digitales capables de penser, d'être conscientes
- *behaviorism mechanism* : hypothèse selon laquelle des machines peuvent se comporter comme si elles pensaient

$\boxed{\text{Mécanisme digital indexical} \Longrightarrow \textit{strong AI} \Longrightarrow \textit{behaviorism mechanism}}$

Physique : étude de l'observable (du répétable)

$G \nvdash \neg\Box\bot$ (G ne peut prouver sa consistance)
$G^* \vdash \neg\Box\bot$

$$
\begin{array}{lll}
G \vdash \neg\Box\bot & \longrightarrow & \neg\Box\neg\Box\bot \\
\quad\ \Diamond\top & & \neg\Box\Diamond\top \\
 & & \Diamond\Box\bot
\end{array}
$$

$G \nvdash \boxdot p \longleftrightarrow \Box p$
$G^* \vdash \boxdot p \longleftrightarrow \Box p$

14 Samedi 27 février 2010 : Mécanisme

On n'a pas besoin de plus que le réalisme arithmétique pour expliquer l'apparition de la personne.

Commentaire personnel

Pour Deutsch c'est le monde physique qui fait le calcul, donc primauté de la matière.

L'existence d'un niveau de substitution de la personne, est-ce que finalement cela ne serait pas un argument en faveur de l'émergence de la conscience : il existe un niveau d'abstraction sur lequel repose la conscience.

---

15 Samedi 17 avril 2010 : On recommence

15.1 AUDA : *Arithmetical Universal Dovetailer Argument*

$(\mathcal{A}_1)$ $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$ (cf. [Théologie Machines], p.8)

$\boxed{\mathcal{A}_1 \iff \nexists x \in \mathbb{Z}, \nexists y \in \mathbb{Z}_* : x^2 = 2y^2}$

Démonstration

$\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}_* : x^2 = 2y^2$
$\iff \exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}_* : x = \sqrt{2}y$
$\iff \exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}_* : \frac{x}{y} = \sqrt{2}$
$\iff \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ $\Box$

Résoudre l'équation diophantienne $x^2 + y^2 = z^2$ $(\mathcal{A}_2)$
Cf. les triplets pythagoriciens p.17 dans [Nombres 1].

16 Samedi 24 avril 2010 : Computationnalisme

16.1 UDA : *Universal Dovetailer Argument*

Le raisonnement ne va être basé que sur le scannage *en principe* de soi.

Commentaire personnel

Donc il faut envisager le cas : cela *n'arrive pas*.

Commentaire personnel

Prendre garde à distinguer l'"Esprit" d'un esprit conscient "lié" à une personne.

$? \longrightarrow$ matière $\longrightarrow$ personne

Définition du computationnalisme (*Digital Mechanism*, DM, Mécanisme digital) :

- Je suis (un homme est, un animal est) une machine digitalisable.
  À préciser...
- ($\mathfrak{U}_1$) Il existe un niveau de description de "je" tel que je survis à une substitution fonctionnelle digital(isable) opérée à ce niveau.

Commentaire personnel

"Je" suis une machine $\neq$ "je" est "porté par" une machine.

$\neg\,\mathfrak{U}_1 : \nexists$ niveau n, $\left|\begin{array}{l}\forall n : \text{corps inanimé}\\ \exists n : \text{zombie}\end{array}\right.$

Commentaire personnel

On a changé de point de vue en passant à la négation : on est passé d'une définition impliquant principalement une vision subjective à sa version négative impliquant principalement une vision "objective".

$\mathfrak{U}_1 : \forall\text{“je”}, \exists$ niveau $, \forall$ substitution s à ce niveau $: s(\text{“je”}) \equiv \text{“je”}$

$\neg\,\mathfrak{U}_1 : \exists\text{“je”}, \forall$ niveau $, \exists$ substitution s à ce niveau $: s(\text{“je”}) \not\equiv \text{“je”}$

---

17 Samedi 1er mai 2010 : [Absent]

18 Samedi 8 mai 2010 : Divise, PGCD

$\forall a, b \in \mathbb{N}$:

$a \leqslant b \overset{\triangle}{\iff} \exists k \in \mathbb{N} : b = a + k$ — a est inférieur ou égal à b

$a < b \overset{\triangle}{\iff} \exists k \in \mathbb{N} : b = a + (k+1)$ — a est strictement inférieur à b

$a \setminus b \overset{\triangle}{\iff} \exists k \in \mathbb{N} : b = k.a$ — a divise (est un diviseur de) b

$\boxed{\forall b \in \mathbb{N} : \ 1 \setminus b}$

Démonstration

$b = b.1$ $\square$

$\boxed{\forall a \in \mathbb{N} : \ a \setminus a}$ $\boxed{0 \setminus 0}$

Démonstration

$a = 1.a$ $\square$

$\boxed{\forall a \in \mathbb{N} : \ a \setminus 0}$

Démonstration

$0 = 0.a$ $\square$

$\boxed{\forall b \in \mathbb{N}_* : \ 0 \not\setminus b}$

Démonstration

$b \neq 0 = k.0 \quad \forall k$ $\square$

$\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{N} : \ a \setminus b \implies a.c \setminus b.c}$

Démonstration

$a \setminus b \iff \exists k : b = k.a$

$\implies \exists k : b.c = (k.a).c \iff a.c \setminus b.c$ $\square$

$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N}_* : \ a \setminus b \iff a.c \setminus b.c}$

Démonstration

$a \setminus b \iff \exists k : b = k.a$

$\overset{(c \neq 0)}{\iff} \exists k : b.c = k.(a.c) \iff a.c \setminus b.c$ $\square$

$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N} : \ a \neq 1 \implies (a \not\setminus b) \ \vee \ [a \not\setminus (b+1)]}$

Démonstration

Montrons la contraposition : $\boxed{\left.\begin{array}{l} a \setminus b \\ a \setminus (b+1) \end{array}\right| \implies a = 1}$

$a \setminus b \iff \exists k : b = k.a$

$a \setminus (b+1) \iff \exists l : b+1 = l.a$

Donc $b+1 = k.a+1 = l.a$ et $1 = l.a - k.a = (l-k).a$

D'où $a = 1$ (et $l = k+1$) $\square$

$$\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{N} : \left.\begin{array}{r} a \setminus b \\ a \setminus c \\ b \geqslant c \end{array}\right| \implies a \setminus (b-c)}$$

Démonstration

$a \setminus b \iff \exists k : b = k.a$

$a \setminus c \iff \exists l : c = l.a$

$0 \leqslant b - c = k.a - l.a = (k-l).a \implies a \setminus (b-c)$ $\square$

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N} : \ a \setminus b \implies (b = 0) \vee (a \leqslant b)} \qquad \boxed{a > b > 0 \implies a \not\setminus b}$$

Démonstration

$a \setminus b \iff \exists k : b = k.a$

$b \neq 0 \implies k > 0$ et donc $b \geqslant a$ □

$\forall n \in \mathbb{N} : \ \mathcal{D}(n) := \{d \in \mathbb{N} \mid d \setminus n\}$ ensemble des diviseurs

$\mathcal{D}(14) = \{1, 2, 7, 14\}$

$\mathcal{D}(8) = \{1, 2, 4, 8\}$

$\mathcal{D}(14) \cap \mathcal{D}(8) = \{1, 2\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{D}(0) = \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}_* : \mathcal{D}(n) \text{ est fini} \end{array}}$$

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N} : \ a \geqslant b \implies \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) \subseteq \mathcal{D}(a - b)}$$

Démonstration

$d \setminus a$ et $d \setminus b$ alors $d \setminus (a - b)$ □

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall a, b \in \mathbb{N} : \\ \quad a \geqslant b \implies \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a - b) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(a - b) \end{array}}$$

Démonstration

$d \in \mathcal{D}(a - b) \cap \mathcal{D}(b) \iff \exists k, l : \left| \begin{array}{l} a - b = k.d \\ b = l.d \end{array} \right.$

$\implies a = (k + l).d \implies d \in \mathcal{D}(a)$ □

$\forall a, b \in \mathbb{N} : \ a \sqcap b := \sup(\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b))$ PGCD : plus grand commun diviseur

$14 \sqcap 8 = 2$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \sqcap 0 = \infty \\ \forall a \in \mathbb{N}_* : a \sqcap 0 = a \end{array}}$$

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N} : \ a \geqslant b \implies a \sqcap b = (a - b) \sqcap b = a \sqcap (a - b)}$$

Algorithme d'Euclide pour calculer $a \sqcap b$ lorsqu $a \geqslant b$:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 := a \text{ et } b_0 := b \\ \text{Ensuite, } a_{i+1} = \max(a_i - b_i, b_i) \text{ et } b_{i+1} = \min(a_i - b_i, b_i) \\ \text{Jusqu'à tomber sur } a_k = b_k = a \sqcap b \quad (\text{ou } a_k = a \sqcap b \text{ et } b_k = 0) \end{array}}$$

$14 \sqcap 8$	$a \sqcap b$
$= 8 \sqcap 6$	$= b \sqcap (a - b)$
$= 6 \sqcap 2$	$= (a - b) \sqcap (-a + 2b)$
$= 4 \sqcap 2$	$= (2a - 3b) \sqcap (-a + 2b)$
$= 2 \sqcap 2$	$= (3a - 5b) \sqcap (-a + 2b)$
$= 2$	$= 3a - 5b = -a + 2b$

$14 \sqcap 8 = 2 = 3.14 \;-\; 5.8 = -1.14 \;+\; 2.8$

$1309 \sqcap 391 = 17 = -20.1309 \;+\; 67.391 = 3.1309 \;-\; 10.391$

Version plus rapide :

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 := a \text{ et } b_0 := b \\ \text{Ensuite, } a_{i+1} = b_i \text{ et } b_{i+1} = a_i \% b_i \\ \text{Jusqu'à tomber sur } a_k = a \sqcap b \text{ et } b_k = 0 \end{array}}$$

Commentaire personnel

$\boxed{\backslash \text{ est une relation d'ordre dans } \mathbb{N}}$:

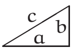
- Réflexive : $\forall a \in \mathbb{N} : a \backslash a$
- Anti-symétrique : $\forall a, b \in \mathbb{N} : \left. \begin{array}{r} a \backslash b \\ b \backslash a \end{array} \right| \implies a = b$
- Transitive : $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : \left. \begin{array}{r} a \backslash b \\ b \backslash c \end{array} \right| \implies a \backslash c$

$\# \{\text{application } f : E \times E \longrightarrow \{0,1\}\} = \# \left\{ \{0,1\}^{E \times E} \right\} = 2^{(\# E)^2}$

$\# \{\text{relation d'ordre } \mathcal{R} : E \times E \longrightarrow \{0,1\}\} = \ ?$

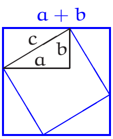
---

19 Samedi 15 mai 2010 : Théorème de Pythagore



$a^2 + b^2 = c^2$

Démonstration



$$(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2}$$
$$\iff a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$
$$\iff a^2 + b^2 = c^2$$

□

20 Samedi 22 mai 2010 : PGCD et identité de Bachet–Bézout

Division euclidienne :

$(\mathcal{A}_3)$ $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall d \in \mathbb{N}_*, \exists!\, q, r \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} n = qd + r \\ r < d \end{array} \right.}$ (cf. [Nombres 1], p.45)

Identité de Bachet–Bézout :

$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N}, \exists m, n \in \mathbb{Z} : m.a + n.b = a \sqcap b}$ (cf. [Nombres 1], p.46)

$m.a + n.b = a \sqcap b$
$m'.a + n'.b = 0$
$(m + m').a + (n + n').b = a \sqcap b$
$(m + b).a + (n - a).b = a \sqcap b$

21 Samedi 29 mai 2010 : [Absent]

Démonstration par récurrence : cf. [Nombres 1], p.68.

22 Samedi 5 juin 2010 : Lemme d'Euclide

$$\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{N} : \left.\begin{array}{r} a \setminus b \\ a \setminus c \end{array}\right| \implies a \setminus (b + c)}$$

Démonstration

$a \setminus b \iff \exists k : b = k.a$
$a \setminus c \iff \exists l : c = l.a$
$b + c = k.a + l.a = (k + l).a \implies a \setminus (b + c)$ □

$$\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{N} : \left.\begin{array}{r} b\%a = c\%a \\ b \geqslant c \end{array}\right| \implies a \setminus (b - c)}$$

Démonstration

$\exists k : b = k.a + r$
$\exists l : c = l.a + r$
$0 \leqslant b - c = k.a + r - (l.a + r) = (k - l).a \implies a \setminus (b - c)$ □

Lemme d'Euclide (ou théorème de Gauss) :

$\boxed{\forall p \text{ premier}, \forall a, b \in \mathbb{N} : \; p \setminus ab \implies p \setminus a \text{ ou } p \setminus b}$ (cf. [Nombres 1], p.46)

$$\boxed{\forall a, p, q \in \mathbb{N} : \left.\begin{array}{r} p \setminus a \\ q \setminus a \\ p \perp q \end{array}\right| \implies p.q \setminus a}$$

Démonstration

$p \setminus a \iff \exists k : a = k.p$
$q \setminus a \iff \exists l : a = l.q$
$p \perp q \implies 1 = p \sqcap q = m.p + n.q$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$
$a = a.m.p + a.n.q = l.q.m.p + k.p.n.q = p.q.(l.m + k.n) \implies p.q \setminus a$ □

Commentaire personnel

Définition récursive de la multiplication : $\forall a, b \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{l} a.0 := 0 \\ a.(b + 1) := a.b + a \end{array}\right.$

$\boxed{a.1 = a}$

Démonstration

$a.1 = a.0 + a = a$ $\square$

$\boxed{0.b = 0}$

Démonstration par récurrence sur b

Cas de base : $0.0 = 0$

Supposons : $0.b = 0$

Et montrons l'induction : $0.(b+1) = 0.b + 0 = 0$ $\square$

$\boxed{1.b = b}$

Démonstration par récurrence sur b

Cas de base : $1.0 = 0$

Supposons : $1.b = b$

Montrons l'induction : $1.(b+1) = 1.b + 1 = b + 1$ $\square$

$\boxed{(a+1).b = a.b + b}$

Démonstration par récurrence sur b

Cas de base : $(a+1).0 = 0$

Supposons : $(a+1).b = a.b + b$

Montrons l'induction : $(a+1).(b+1) = (a+1).b + (a+1) = a.b + b + a + 1$

$= (a.b + a) + (b+1) = a.(b+1) + (b+1)$ $\square$

$\boxed{a.b = b.a}$

Démonstration par récurrence sur b

Cas de base : $a.0 = 0 = 0.a$

Supposons : $a.b = b.a$

Montrons l'induction : $a.(b+1) = a.b + a = b.a + a = (b+1).a$ $\square$

Commentaire personnel

$$\begin{array}{lcl} \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{N}^i \times \mathbb{N}_*\right) & \xrightarrow{=} & \mathbb{N}+2 \\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \neq 0) & \longmapsto & \prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i^{\alpha_i} \end{array}$$

---

23 Samedi 12 juin 2010 : Théorème fondamental de l'arithmétique

$$\boxed{\forall a, b, d \in \mathbb{N} : \left.\begin{array}{l} d \setminus a.b \\ d \perp a \end{array}\right| \implies d \setminus b}$$

Démonstration

$d \backslash a.b \iff \exists k : a.b = k.d$
$d \perp a \implies 1 = d \sqcap a = m.d + n.a$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$
$b = b.m.d + b.n.a = d.(b.m + k.n) \implies d \backslash b$ $\square$

Théorème fondamental de l'arithmétique :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}_*, \exists! (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_*} \subseteq \mathbb{N} : \ n = \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_i^{\alpha_i}}$$

(cf. [Nombres 1], p.47)

24 Samedi 19 juin 2010 : Théorème des restes chinois

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall a, b \in \mathbb{N}_* : \\ \quad a \perp b \implies \text{les nombres } n = 0, 1, 2, \ldots, ab - 1 \\ \qquad\qquad\quad \text{donnent les } ab \text{ couples distincts } (n\%a, n\%b) \end{array}}$$

Démonstration par l'absurde

Supposons n et n' tels que $\left| \begin{array}{l} 0 \leqslant n < n' < ab \\ n\%a = n'\%a \\ n\%b = n'\%b \end{array} \right.$

Alors $a \backslash (n' - n)$ et $b \backslash (n' - n)$, donc $ab \backslash (n' - n)$
D'où $n' - n = 0$ ou $ab \leqslant n' - n \leqslant n' < ab$ **KO** $\square$

Exemple :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$n\%3$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
$n\%5$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall r, m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{N}_* : \\ \quad \left. \begin{array}{l} \forall i \neq j : m_i \perp m_j \\ m = \prod_{i=1}^{r} m_i \end{array} \right| \implies \begin{array}{l} \text{les nombres } n = 0, 1, 2, \ldots, m - 1 \\ \text{donnent les } m \text{ } r\text{-uples distincts} \\ (n\%m_1, n\%m_2, \ldots, n\%m_r) \end{array} \end{array}}$$

Commentaire personnel

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall r, m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{N}_*, \forall a_1, a_2, \ldots, a_r, A \in \mathbb{Z} : \\ \quad \left. \begin{array}{l} \forall i \neq j : m_i \perp m_j \\ m = m_1.m_2. \ \ldots \ .m_r \end{array} \right| \implies \exists! \, a \in \mathbb{Z} : \left| \begin{array}{l} a \equiv a_i \ \ [m_i] \ \ \forall i \\ A \leqslant a < A + m \end{array} \right. \end{array}}$$

25 Samedi 3 juillet 2010 : Principe 323

DM (alias COMP) : il existe un niveau de description de “moi-même” (3-je, *body*) tel que “je” (1-je, *person*, *soul*) survis à une substitution digitale de mes parties faite à ce niveau.

qua computatio : cela marche grâce au mécanisme digital.

Principe 323 :
Soit M une machine [2] qui implémente un calcul C dans un laps de temps sur lequel supervient physiquement une expérience de conscience E [3].
Si une transformation de M [4] est telle qu'elle n'influence aucunement C,
alors elle n'influence aucunement E.

26 **Samedi** 10 **juillet** 2010 : Ralentissement de l'horloge interne

Considérons qu'une machine M est dotée d'une horloge [5] qui rythme les opérations qu'elle effectue, sur lesquelles surpervient une expérience de conscience E.
Si nous ralentissons l'horloge de M
alors la perception de l'environnment dans E s'en trouve accélérée (c.-à-d. que pour un nombre donné d'opérations internes, le nombre d'opérations externes est plus grand).

Commentaire personnel

L'expérience de conscience qui supervient sur une machine est influencée par le changement (suffisant) de vitesse de l'horloge interne d'une machine. Pourtant cela ne modifie pas les opérations effectuées !

Une expérience de conscience qui supervient sur l'activité d'une machine signifie que l'activité de cette machine (ou d'une autre fonctionnellement équivalente pour cette activité) est nécessaire pour que survienne cette expérience de conscience. Sous-entend-on qu'elle est suffisante ?
Auquel cas quid de la perception de l'environnement ! Et sinon que considérer ?

27 **Samedi** 17 **juillet** 2010 : Absent

2. Nous laissons pour le moment ouverte la question de la nature de cette machine.
3. Ce qui a un sens sous l'hypothèse COMP.
4. Par exemple enlever son registre 323.
5. À l'instar de nos ordinateurs.

Annexes

Logiques modales

On ajoute les symboles $\Box$ et $\Diamond$ au calcul propositionnel classique.
Cf. [Abrégé Logique].
On ne considère que les logiques modales qui vérifient $\Diamond A = \neg\Box\neg A$

$\boxdot A := \Box A \wedge A$
$\diamonddot A := \Diamond A \vee A$ $\qquad\qquad \boxed{\diamonddot A = \neg\boxdot\neg A}$

Quelques formules courantes :
[K] $\Box(A \to B) \longrightarrow (\Box A \to \Box B)$ (formule de Kripke)
[triv] $A \to \Box A$ ($\iff$ chaque monde est terminal ou réflexif)
[T] $\Box A \to A$ ($\iff$ $\mathcal{R}$ est réflexive) (f. de réflexion, de Feys - von Wright)
[4] $\Box A \to \Box\Box A$ ($\iff$ $\mathcal{R}$ est transitive)
[5] $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ ($\iff$ $\mathcal{R}$ est euclidienne)
[L] $\Box(\Box A \to A) \longrightarrow \Box A$ (formule de Löb)
($\iff$ $\mathcal{R}$ est transitive et bien-chapeautée)
[Grz] $\Box\,[\Box(A \to \Box A) \to A] \longrightarrow A$ (formule de Grzegorczyk[6])
($\iff$ $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans W fini)

Quelques règles d'inférences courantes :

[MP] $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ $\quad(\leftrightsquigarrow$ [K]) (modus ponens)

[NEC] $\dfrac{A}{\Box A}$ $\quad(\leftrightsquigarrow$ [4]) (nécessitation)

[POS] $\dfrac{A}{\Diamond A}$ (possibilitation)

Une logique modale est normale (syntaxiquement) $\overset{\triangle}{\iff} \left|\begin{array}{l} \vdash \text{[K]} \\ \text{fermée pour [NEC]} \end{array}\right.$

$\iff$ elle admet une sémantique de Kripke

Logique G (logique de la prouvabilité) (ou logique GL, pour Gödel - Löb)

Schémas d'axiomes :

- Axiomes du calcul propositionnel
- [K] $\Box(A \to B) \longrightarrow (\Box A \to \Box B)$
- [L] $\Box(\Box A \to A) \longrightarrow \Box A$

Règles d'inférence :

- [MP]
- [NEC]

6. Trouvée par Sobocinsky.

$\boxed{G \vdash [4]\ \Box A \to \Box\Box A}$

$\boxed{\text{G admet une sémantique de Kripke : } \mathcal{R} \text{ transitive et bien-chapeautée}}$

$\Box A = A$ est démontrable $=$ Bew($\ulcorner A \urcorner$)
$\Diamond A = A$ est consistante

Logique G* (ou logique GLS, pour Gödel - Löb - Solovay)

"Schémas" d'axiomes :

- Tous les théorèmes de G
- [T] $\Box A \to A$

Règles d'inférence : (attention, sans [NEC])

- [MP]

$\boxed{\text{G}^* \text{ n'admet ni sémantique de Kripke, ni sémantique algébrique}}$

Logique S4Grz (logique de la connaissance)

Schémas d'axiomes :

- Axiomes du calcul propositionnel
- [K] $\Box(A \to B) \longrightarrow (\Box A \to \Box B)$
- [Grz] $\Box\,[\Box(A \to \Box A) \to A] \longrightarrow A$

Règles d'inférence :

- [MP]
- [NEC]

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{S4Grz} \vdash [T]\ \Box A \to A \\ \text{S4Grz} \vdash [4]\ \Box A \to \Box\Box A \end{array}}$$

$\boxed{\text{S4Grz admet une sémantique de Kripke : } \mathcal{R} \text{ relation d'ordre dans } W \text{ fini}}$

$\Box A = A$ est ...
$\Diamond A = A$ est ...

? Le $\boxdot$ dans la logique S4Grz correspond au $\Box$ dans la logique G. ?

$\boxdot A = A$ est démontrable et vrai $= A$ est connaissable
$\diamonddot A = A$ est plausible

Liste des personnalités évoquées

~ −385 − −322 : Aristote

−IVe − −IIIe : Euclide

1581 − 1638 : Claude-Gaspard Bachet de Méziriac

1730 − 1783 : Étienne Bézout

1777 − 1855 : Carl Friedrich Gauss

1862 − 1943 : David Hilbert

1889 − 1961 : Robert Feys

1906 − 1978 : Kurt Gödel

1909 − 1994 : Stephen Cole Kleene

1911 − 2008 : John Wheeler

1916 − 2003 : Georg Henrik von Wright

1921 − 2006 : Martin Hugo Löb

1940 − 1996 : George Stephen Boolos

1940 − : Saül Kripke

1941 − : Richard Dawkins

1953 − : David Deutsch

1953 − : Carolyn Porco

1955 − : Bruno Marchal http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/

1967 − : Max Tegmark

? − : Ned ≃Block

? − : Douglas Bridge

? − : Andrzej Grzegorczyk 1950, 1964, 1967

? − : ? Hirchberger

? − : ? ≃Schmidhuber

? − : ? Sobocinsky

? − : Robert Martin Solovay 1964, 1976

Références

[Abrégé Logique] Olivier Pirson,
Abrégé de Logiques Classiques[7]. 6, 18

[CPC] Bruno Marchal,
Calculabilité, Physique et Cognition[8].
Thèse soutenue à L'Université des Sciences et Technologies de Lille, 2 juin 1998.

[Théologie Machines] Olivier Pirson,
La Théologie des Machines[9].
Notes à partir du séminaire 2007 – 2008 de Bruno Marchal. 9

[Théologie Machines 2008 – 2009] Olivier Pirson,
La Théologie des Machines 2008 – 2009[10].
Notes à partir du séminaire 2008 – 2009 de Bruno Marchal.

[Nombres 1] Olivier Pirson,
Les Nombres : Science • Art • Théologie :
1re partie : Théologie grecque, Sommes et différences[11].
Notes à partir du séminaire 2006 – 2007 de Bruno Marchal. 9, 13, 14, 16

[Nombres 2] Olivier Pirson,
Les Nombres : Science • Art • Théologie : 2e partie . . .[12]
Notes à partir du séminaire 2006 – 2007 de Bruno Marchal.

[Everything] Theory of Everything List[13].
Archives **everything-list**[14].

[Wikipédia] **Wikipédia**[15], l'encyclopédie libre.

7. http://www.opimedia.be/logiques/
8. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/lillethesis/CPC.pdf
9. http://www.opimedia.be/Bruno_Marchal/index.htm#Theo
10. http://www.opimedia.be/Bruno_Marchal/index.htm#Theo2008
11. http://www.opimedia.be/Bruno_Marchal/index.htm#Nombres1
12. http://www.opimedia.be/Bruno_Marchal/index.htm#Nombres2
13. http://groups.google.com/group/everything-list
14. http://www.mail-archive.com/everything-list@eskimo.com/
15. http://fr.wikipedia.org/

Index

Table des matières

ⓈTEX*tes*

mis en page sous DSTEX
le 8 janvier 2012
http://www.opimedia.be/DS/