Les Nombres

Science • Art • Théologie

Séminaire donné par

Bruno Marchal[1]

2006 – 2007 (IRIDIA/ CEΨ[2])

“**Science**
Nous illustrerons l'infinie richesse des nombres et des relations qu'ils ont entre eux à travers une suite de théorèmes accompagnés de démonstrations et d'illustrations.

Art
Les multiples apparitions du nombre d'or et des nombres d'argent. Les suites musicales de Kindermann et autres quasi auto-similarités chaotiques numériques.

Théologie
La théologie grecque de Pythagore (environ -500 av. J.–C.) à Proclus (environ 500 ap. J.–C.) avec une emphase particulière sur Plotin (environ 250 ap. J.–C.) et son traité sur les nombres. Comment le computationnalisme en science cognitive dégage une interprétation arithmétique des hypostases de Plotin y compris celles censées décrire la matière, et comment peut-on les tester en les comparant à la théorie quantique contemporaine.”

2e partie. . .

Notes d'Olivier Pirson
olivier_pirson_opi@yahoo.fr
http://www.opimedia.be/

mardi 13 avril 2010

1. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/
2. http://www.ulb.ac.be/cepsy/

À propos de ce document

Ce document est la suite – très fragmentaire – de *Les Nombres : Science • Art • Théologie : 1re partie : Théologie grecque, Sommes et différences*[3].

Ne vous fiez pas à l'aspect propret de ce carnet. Son contenu est une succession de notes brouillonnes (prises lors du séminaire de Bruno Marchal), souvent incomplètes et non retravaillées.

Le tout n'engage que moi, et est livré tel quel, sans garantie.

Olivier Pirson

1 Samedi 25 novembre 2006 : Différences finies

... Cf. [Nombres 1]

2 Samedi 2 décembre 2006 : Fonctions, diagonalisations

...

3 Samedi 9 décembre 2006 : Théorème de Cantor

...

4 Samedi 16 décembre 2006 : Ordinaux transfinis

...

5 Samedi 30 décembre 2006 : Identité de Jacobi

... Cf. [Nombres 1]

6 Samedi 6 janvier 2007 : Théorème de Jacobi ; diagonalisations

...

3. [Nombres 1]

7 Samedi 20 janvier 2007 : Fonctions calculables

. . .

Commentaire personnel

Une fonction est totale (partout définie) ou partielle (non partout définie).

Une application est une fonction partout définie.

Une bijection est une application bijective.

Une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est calculable

$\stackrel{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ | il existe un langage
  dans lequel on peut décrire de façon **finie** comment calculer f
| $\forall n \in \operatorname{dom} f$: le calcul de $f(n)$ est fini

A est énumérable (ou infini dénombrable) $\stackrel{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ bijection : $\mathbb{N} \stackrel{\sim}{\longrightarrow} A$

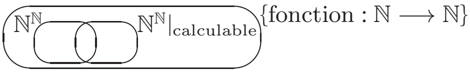
A est récursivement énumérable $\stackrel{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ bijection calculable : $\mathbb{N} \stackrel{\sim}{\longrightarrow} A$

$A \subseteq \mathbb{N}$ est récursif $\stackrel{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ A et $\mathbb{N} \setminus A$ sont récursivement énumérable

$\mathbb{N}^\mathbb{N} \simeq \mathbb{R} \simeq 2^\mathbb{N}$ sont non énumérables $\qquad \#\mathbb{N}^\mathbb{N} = 2^{\aleph_0}$

$\mathbb{N}^\mathbb{N}|_{\text{calculable}} :=$ {application calculable : $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$} est énumérable
  mais non récursivement énumérable

{fonction calculable : $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$} est récursivement énumérable



---

8 Samedi 27 janvier 2007 : Ensembles récursifs

. . .

Commentaire personnel

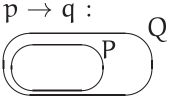
formel : “1 – qui est formulé précisément 2 – qui s’occupe de l’aspect extérieur plus que du contenu 3 – qui concerne la structure, la relation entre éléments 4 – qui privilégie les formes 5 – qui est énoncé pour la forme, pour le principe” ([Universalis])

---

9 Samedi 3 février 2007 : Plan et logiques

. . .

$p \rightarrow q$:



L’ensemble des mondes dans lesquels p est vrai est inclus dans l’ensemble des mondes dans lesquels q est vrai.

Commentaire personnel

Dans *Principia mathematica*, RUSSELL notait $p \supset q$ pour $p \to q$!

Cette implication $\to$ ne correspond pas à la notion de causalité. Si on cherche un opérateur binaire tel que seulement le vrai “implique” le vrai, on tombe sur la conjonction $\wedge$. Mais $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$!

La nécessité est une forme d'implication causale dans la sémantique de KRIPKE.

$\Box(\Box p \to p) \longrightarrow p$ $\qquad \dfrac{\vdots \atop \Box p \to p}{p}$ dans la logique G ?

10 Samedi 10 février 2007 : Les 8 hypostases

Thèse de Bruno MARCHAL :

UDA (Universal Dovetailer Argument) :

UD (Universal Dovetailer)

COMP : hypothèse du computationnalisme c.-à-d. :

- yes doctor : nous sommes des machines (~ hypothèse de DESCARTES) digitales
- TC : Thèse de CHURCH
- réalisme arithmétique

$\boxed{\text{COMP} \Longrightarrow \text{la physique est une branche de la théorie des nombres}}$

C'est un *mathématicalisme*, par opposition au physicalisme.

mathématisme : “en philosophie, doctrine considérant les méthodes mathématiques comme essentielles à la compréhension de tout domaine” ([Universalis])

physicalisme : “en philosophie, doctrine empiriste considérant le langage scientifique comme universel et pouvant s'appliquer aux sciences humaines” ([Universalis])

Le COMP dit de lui-même qu'il est indémontrable.

« Dieu a créé les entiers, le reste est un rêve des nombres entiers. »

(Bruno MARCHAL)

AUDA (Arithmetical UDA) : ~ interview de la machine löbienne

On peut traduire UDA dans le langage des machines universelles.

Démonstration presque constructive : amène à la manière d'extraire la physique de la théorie des nombres, de la théorie de l'autoréférence des machines universelles.

Un livre de James R. BROWN sur les expériences par la pensée (*The Laboratory of the Mind: Thought Experiments in the Natural Sciences*) :

exemple de la réfutation par GALILÉE de l'hypothèse d'ARISTOTE selon laquelle une boule d'un kg de plomb tomberait plus vite qu'un kg de plume. L'idée est d'attaché les deux...

Bew($\ulcorner p \urcorner$) défini dans : $\exists, (\forall), \wedge, \vee, \rightarrow, s, 0, +, \times$

Théorème de GÖDEL : $\neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \perp \urcorner) \longrightarrow \neg \mathrm{Bew}\,(\neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \perp \urcorner))$
Si je suis consistant alors il est impossible de prouver que je le suis

$\Diamond \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \neg\Box\neg$

$\neg\Box\perp \longrightarrow \neg\Box\neg\Box\perp$
$\Diamond\top \longrightarrow \neg\Box\Diamond\top$
$\Diamond\top \longrightarrow \Diamond\Box\perp$
$\Box\perp \vee \Diamond\Box\perp$ $\qquad (A \rightarrow B) \longleftrightarrow (\neg A \vee B)$
Il existe une preuve du faux ou il est consistant qu'il existe une preuve du faux.

La consistance de soi est un indécidable.

Formule de KRIPKE [K] $\Box(p \rightarrow q) \longrightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ ($\sim$ elle comprend le MP)
$K \longleftrightarrow [\Box(p \rightarrow q) \wedge \Box p] \rightarrow \Box q$ $\qquad [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \longleftrightarrow [(A \wedge B) \rightarrow C]$
$\Diamond p \rightarrow \neg\Box\Diamond p$

$\neg\Box\perp \longleftrightarrow (\Box\perp \rightarrow \perp)$
$\Box(\Box\perp \rightarrow \perp)$ est faux

$\Box p \rightarrow p$: correctitude de la machine (incorrigibilité dans la logique du savoir)
$\Box(\Box p \rightarrow p)$ est faux

Formule de LÖB [L] $\Box(\Box p \rightarrow p) \longrightarrow \Box p$
Prouver du point de vue de la machine c'est une croyance. $\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Box p \longrightarrow p\end{matrix}}{p}$?

Règles d'inférences : modus ponens MP : $\dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ p & & p \rightarrow q\end{matrix}}{q}$

nécessitation NEC : $\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ p\end{matrix}}{\Box p}$ (Y a-t-il une "règle" qui fait le "contraire" ?)

[4] $\Box p \rightarrow \Box\Box p$?

Logique G : Axiomes : $\left| \begin{matrix} K \\ L \end{matrix} \right.$

Règles d'inférences : $\left| \begin{matrix} \text{MP} \\ \text{NEC} \end{matrix} \right.$

$L \longrightarrow (\Box p \to \Box\Box p)$

$\exists n P(n) \to \Box \exists n P(n)$
$p \to \Box p \iff$ être universel
PA est löbienne

(Feys et Curry : logique combinatoire)

Formule de Feys [t] $\Box p \to p$ (Elle n'est pas prouvable par la machine.)

Supposons une machine :

- consistante : $\neg \Box \bot \ \leftrightarrow\ \Diamond \top$
- correcte : $\Box p \to p$

$\Box p \ \leftrightarrow\ \Box p \wedge p$ est vrai mais non dénombrable

$\boxdot p := \Box p \wedge p$ savoir
$\boxdot$ n'est pas définissable dans le langage de la machine.

Commentaire personnel

Essayer par l'absurde : prenons $\Box p \leftrightarrow \Box p \wedge p$ et ...

$\Box p \to \Diamond p$ est faux, car sinon $\dfrac{\Box p \to \Diamond p}{\Box \top \to \Diamond \top}$

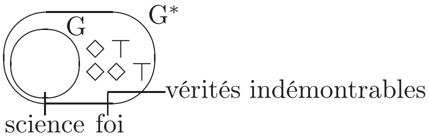
$\boxcircle p := \Box p \wedge \Diamond p$

Théorème de Solovay : G capture complètement la partie prouvable de la logique de prouvabilité de la machine.

Logique G^* : Axiomes : $\left|\begin{array}{l}\text{tous les théorèmes de G} \\ t\end{array}\right.$
Règle d'inférence : MP

Si on prenait aussi NEC dans G^*, on aurait :

$\Box(\Box p \to p) \longrightarrow \Box p$
$\Box(\Box \bot \to \bot) \longrightarrow \Box \bot \qquad \longleftrightarrow \Diamond \top \to \Diamond \Box \bot$
$\Box p \to p$
$\Box \bot \to \bot$
$\Box(\Box \bot \to \bot)$
Par MP : $\Box \bot$
Par MP : $\bot$ KO
G^* serait inconsistante



(Question de définir LISP en LISP
$\neq$ Question de code LISP qui s'autoduplique)

PLOTIN : • Un
• Intellect
• Âme

	Terrestre (discursif, effectif, prouvable)	**Divin**
	p	**Un** : ensemble des propositions vraies de l'arithmétique Est innommable, non définissable dans l'arithmétique (th. de TARSKI)
primaire (monde des idées de PLOTIN)	Intellect discursif, terrestre $\Box p$ G je à la 3^{e} personne science de l'autoréférence autoréférence à la 3^{e} personne	Intellect divin $\Box p$ G* la foi **Âme** : innommable je à la 1re personne *topos* (lieu)
	$\Box p \wedge p$	All Soul
secondaire	matière intelligible $\Box p \wedge \Diamond p$ Z matière sensible $\Box p \wedge \Diamond p \wedge p$ X	quanta $\Box p \wedge \Diamond p$ Z* qualia $\Box p \wedge \Diamond p \wedge p$ X*

C'est dans la matière intelligible que l'on doit pouvoir tester la théorie par comparaison avec la physique.

Commentaire personnel

Le *je* à la première personne est un *nous* ?..
"Du grec *Noûs*, l'Esprit, la Pensée, l'Intelligence suprême." ? (*Les Présocratiques*)

“La conséquence est que la science n’atteint pas les choses elles-mêmes, comme le pensent les dogmatismes naïfs, mais les rapports entre les choses ; en dehors de ces rapports, il n’y pas de réalité connaissable.” (*La science et l’hypothèse*/ Henri POINCARÉ)

aléthique : “adj. Log. Se dit d’une proposition ou d’une modalité qui ne concerne que le vrai, le faux et l’indéterminé (par opp. à *déontique*).” ([Larousse])
déontique : “adj. Log. *Logique déontique :* étude systématique des propriétés formelles vérifiées par des notions juridiques comme celles de droit et d’obligation (par opp. à *aléthique*).” ([Larousse])

innommable : “adj. Trop vil, trop dégoûtant pour être nommé ; inqualifiable. *Crime innommable.*” ([Larousse]) :-)

Est-ce une théorie du physicien ?

Que se passe-t-il lorsque deux machines löbiennes se parlent ? Elles peuvent croire le G^* de l’autre.

Croire $\neq$ écouter la croyance.

Démontrer :	Croire (non réfutation) :
$\Box p$	$\Diamond p \; := \; \neg\Box\neg p$
Savoir :	
$\boxdot p \; := \; \Box p \wedge p$	$⟐ p \; := \; \neg\boxdot\neg p$ $\leftrightarrow \Diamond p \vee p$
$\boxcircle p \; := \; \Box p \wedge \Diamond p$	$\circledcirc_{\Diamond} p \; := \; \neg\boxcircle\neg p$ $\leftrightarrow \Diamond p \vee \Box p$
$\boxed{\odot} p \; := \; \Box p \wedge \Diamond p \wedge p$	$\odot_{\Diamond} p \; := \; \neg\boxed{\odot}\neg p$ $\leftrightarrow \Diamond p \vee \Box p \vee p$
$\boxed{\vee} p \; := \; \Box p \vee p$ intuition ?	$\vee_{\Diamond} p \; := \; \neg\boxed{\vee}\neg p$ $\leftrightarrow \Diamond p \wedge p$

$\neg\Box\boxdot p$: je ne peux pas démontrer que je sais p
$\longleftrightarrow \; \Diamond\neg\boxdot p$: possible que je ne sache pas p
$\longleftrightarrow \; \Diamond ⟐ \neg p$: possible que
$\longleftrightarrow \; \Diamond(\Diamond\neg p \vee \neg p)$

croire $:= \Box p \wedge \neg\Box\boxdot p$

---

11 Samedi 17 février 2007 : Information quantique

Ordinateur classique :
1 bit : 0 ou 1
unité d'information classique
(logique booléenne de Leibniz d'après la philosophie chinoise du *Yiking*)

Pour l'information quantique on exige une totale réversibilité.
$\Longrightarrow$ Ce qui devrait permettre un traitement, un calcul, sans consommation d'énergie !

EPR : Einstein–Podolski–Rosen

1 qubit :

Histoire de la physique quantique :
1900 : Planck
1927 : congrès Solvay : dispute Bohr–Einstein sur la nature de la réalité physique

matière :	lumière :	
particule	particule	Newton
particule	onde	Huygens (fentes de Young)
	onde/particule	Einstein (effet photoélectrique)

...

Commentaire personnel

$\diamond\top$: “La conscience, c'est le pressentiment de la vérité accessible par un homme.”
(Dostoïevski) (cf. [Secret amibe] p. 81)

12 Samedi 24 février 2007 : Théorie des nœuds

... Cf. [Liens]

Commentaire personnel

En mathématique, un nœud est une ficelle élastique incassable sans épaisseur dont les deux bouts sont collés on ne sait où.

À ne pas confondre avec les nœuds quotidiens, qui eux servent à attachés ensemble deux bouts de ficelle.

Knots and Physics [4] et *Knots and Applications* [5] (Louis H. Kauffman)

4. http://books.google.com/books?id=msMVUefjjnoC
5. http://books.google.com/books?id=3GiVPAYqZKwC

13 Samedi 3 mars 2007 : Théorie des nœuds

...

Commentaire personnel

Lien = “multi-ensemble” de nœuds.

topos nombres discrets

topologie $\xrightarrow{\text{nœuds}}$

“agitation quantique”

Âme $\simeq$ loi, donc bien unique.

---

14 Samedi 10 mars 2007 : Polynôme A de Kauffman

...

15 Samedi 17 mars 2007 : Rappels sur les nœuds

...

16 Samedi 24 mars 2007 : Synthèse pour la suite

...

Commentaire personnel

Presque toutes les possibilités ne seront pas.

Prenez un chat vivant et une boîte opaque pouvant le contenir. Endormez-le ou tuez-le (selon votre bon plaisir), placez-le dans la boîte, fermez-la et quittez la pièce. Le tout à mon insu. Lorsque j’arrive je *sais* (crois) que la boîte contient un chat mort *ou* vivant. Mais je dois *penser* la situation dans laquelle il est mort *et* la situation dans laquelle il est vivant.

---

17 Samedi 31 mars 2007 : Invariant de Kauffman

...

18 Samedi 7 avril 2007 : Théorème d'Alexander, tresses

Théorème d'Alexander : Tout nœud/ lien est enroulable.
...

19 Samedi 14 avril 2007 : Groupe des tresses

...

20 Samedi 21 avril 2007 : Liens avec la mécanique quantique

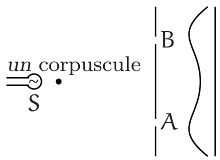
...

21 Samedi 28 avril 2007 : Expériences quantiques des fentes

...

22 Samedi 5 mai 2007 : Produit scalaire

$P_{SE} = P_{SB} \underset{\text{et}}{.} P_{BE} \underset{\text{ou}}{+} P_{SA} \underset{\text{et}}{.} P_{AE}$



$\mathcal{A}_{SE} = \mathcal{A}_{SB}.\mathcal{A}_{BE} + \mathcal{A}_{SA}.\mathcal{A}_{AE}$
Born : $\mathsf{P} = \mathcal{A}^2$
Si $\mathcal{A}$ complexe alors $\mathsf{P} = |\mathsf{A}|^2$

À un état physique il faut associer un vecteur $\overrightarrow{S}$ (abstrait dans un espace abstrait)

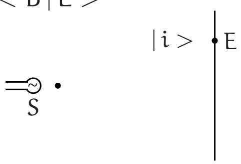
État physique : $|\,\mathsf{S}>$ (notation de Dirac)

$\mathcal{A}_{sa} = (|\,s>, |\,a>) = <s\,|\,a>$

$<\mathsf{S}\,|\,\mathsf{E}> = <\mathsf{S}\,|\,\mathsf{A}> . <\mathsf{A}\,|\,\mathsf{E}> + <\mathsf{S}\,|\,\mathsf{B}> . <\mathsf{B}\,|\,\mathsf{E}>$

$<\mathsf{S}\,|\,\mathsf{E}> = \sum_i <\mathsf{S}\,|\,i> . <i\,|\,\mathsf{E}>$

$|<\mathsf{S}\,|\,\mathsf{E}>|^2 = |\sum_i <\mathsf{S}\,|\,i> . <i\,|\,\mathsf{E}>|^2$



22.1 Produit scalaire de vecteurs

Un groupe $(G, *)$ est un ensemble muni d'une loi $*$ partout définie, tel que :

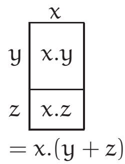
$$\left|\begin{array}{ll} \forall x, y, z \in G : \ (x * y) * z = x * (y * z) & \text{(associative)} \\ \exists e \in G, \forall x \in G : \ x * e = x = e * x & \text{(il existe un neutre noté } e\text{)} \\ \forall x \in G, \exists y \in G : \ x * y = e = y * x & \text{(symétrisable)} \end{array}\right.$$

Si la loi $*$ est commutative ($\forall x, y \in G : \ x * y = y * x$) on dit que le groupe est commutatif.

Exemples : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}_*, .)$ de neutre 0, 0, 1

Un corps (field) $(F, +, .)$ est un ensemble muni de deux lois $+$ et $.$ partout définies, tel que :

$$\left|\begin{array}{l} (F, +) \text{ est un groupe commutatif de neutre noté } 0 \\ (F \setminus \{0\}, .) \text{ est un groupe} \\ . \text{ est distributive sur } + : \forall x, y, z \in F : \left| \begin{array}{l} x.(y + z) = x.y + x.z \\ (x + y).z = x.z + y.z \end{array}\right. \end{array}\right.$$



Exemples : $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ de neutre 0 pour $+$ et 1 pour $.$

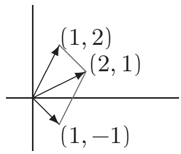
$\forall p$ premier : $\mathbb{Z}_p$ admet une structure de corps
d'espace vectoriel fini

$4 + 3 = 7$
$\pi + \sqrt{2} =$

$(4, 2)$

$\mathbb{R}$

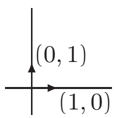
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$



$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
$(1, 2) + (1, -1) = (2, 1)$

$\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel $\overset{\text{Descartes}}{\sim}$ plan

$$\begin{array}{rcl} \text{Multiplication externe } . : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, (x, y)) & \longmapsto & (\alpha.x, \alpha.y) \end{array}$$



$(7, -5) = 7.(1, 0) - 5.(0, 1)$
$(0, 0) = (7, -5) + (-7, 5)$

$\dim \mathbb{R}^n = n$

Commentaire personnel

Dimension de $\mathbb{C}^3$ sur $\mathbb{C}$? Sur $\mathbb{R}$?
$\mathbb{R}^6$ sur $\mathbb{C}$?

Un espace vectoriel (ev) V sur un corps $(K, +, .)$ est un ensemble muni de deux lois partout définies, l'une interne $+$ et l'autre externe $.$, tel que :

$(V,+)$ est un groupe commutatif de neutre noté 0
$. : K \times V \longrightarrow V$ est telle que :
- $.$ est exoassociative : $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V : \ (\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$
- l'unité 1 de K est neutre à gauche : $\forall x \in V : \ 1.x = x$
- $.$ est distributive à gauche sur $+$ de V :
  $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in V : \ \alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$
- $.$ est exodistributive à droite sur $+$ de K :
  $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V : \ (\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$

Produit scalaire de vecteur de V (par ex. $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$) :

Première définition : $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = < \overrightarrow{v} \,|\, \overrightarrow{w} > : \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_i),(y_i)) & \longmapsto & \sum_i x_i.y_i \end{array}$

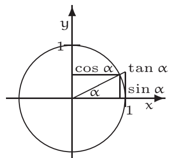
$(x_1, y_1) \bullet (x_2, y2) = x_1.y_1 + x_2.y_2$
$(2,4) \bullet (5,3) = 2.5 + 4.3 = 22$

Deuxième définition, définition axiomatique :

Produit scalaire (réel) : $\left| \begin{array}{l} v \neq 0 \implies < v \,|\, v > > 0 \\ < v \,|\, w > = < w \,|\, v > \\ < v \,|\, \alpha.w + \beta.w' > = \alpha. < v \,|\, w > + \beta. < v \,|\, w' > \end{array} \right.$

$\iff < v \,|\, w > = \sum_i v_i.w_i$

Troisième définition :
$\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = v.w.\cos\alpha \qquad v = \|\overrightarrow{v}\|$



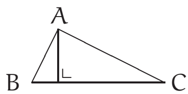
Exercices : Démontrer l'équivalence entre ces trois définitions dans $\mathbb{R}^2$

Commentaire personnel

Définition équivalentes de produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}_*)$:

1. $< x \,|\, y > := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
2. $< \,|\, > : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
   $\left| \begin{array}{l} x \neq 0 \implies < x \,|\, x > > 0 \\ < x \,|\, y > = < y \,|\, x > \\ < \alpha.x + \beta.y \,|\, z > = \alpha. < x \,|\, z > + \beta. < y \,|\, z > \end{array} \right.$
3. $< x \,|\, y > := \|x\|.\|y\|.\cos\alpha$

Norme induite : $\|x\| := \sqrt{< x \,|\, x >}$



Pythagore généralisé : $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + 2.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$

Démonstration

$1 \Rightarrow 2)$ $x \neq 0 \implies < x \,|\, x > = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$

$$< x \,|\, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = < y \,|\, x >$$

$$\begin{aligned} < \alpha.x + \beta.y \,|\, z > &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) z_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \\ &= \alpha. < x \,|\, z > + \beta. < y \,|\, z > \end{aligned}$$

$2 \Rightarrow 1)$ $(e_i)_i$ base orthonormée (telle que $<e_i\,|\,e_j> = \delta_{ij}$) $\left|\begin{array}{l} x =: \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \\ y =: \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \end{array}\right.$

$$\begin{aligned} <x\,|\,y> &= <\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j> = \sum_{i=1}^{n} x_i <e_i \,|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j> \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j <e_i\,|\,e_j> = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

□

---

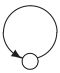
23 Samedi 19 mai 2007 : Préparation pour Sienne

...

24 Samedi 26 mai 2007 : Préparation pour Sienne

ARISTOTE : l'idée qu'il existe un monde physique primitif
(~ préexistence d'un monde physique).
~La science fondamentale c'est la physique.
On croit à l'existence d'un substrat.
Mène au physicalisme. (→ matérialisme éliminativiste)

PLATON : le platonisme couvre −500 à +500
Νουσ[6]
mathématicalisme


auto-observation

La physique *émerge* des mathématiques.

Commentaire personnel

La physique : le *monde* physique ou la *théorie* physique ?

Peut-on dupliquer un "objet" inerte ?

| Vérité
| intelligible
| âme plénière

6. Le sigma final devrait être `\varsigma`.

Les machines löbiennes sont les machines qui peuvent prouver leur propre théorème de GÖDEL.

Hiérarchie présumée de "puissance" :

- ZF : axiomatique de ZERMELO-FRAENKEL
- être humain ?
- PA : PEANO Arithmetic
- LRA : Little ROBINSON Arithmetic

25 Samedi 2 juin 2007 : Second théorème de GÖDEL et hypostases

Roberto MAGARI : logique modale algébrique (algèbre diagonalisable)

Self Reference at Modal Logic (SMORYŃSKI)

Le premier théorème d'incomplétude de GÖDEL :
il existe une proposition vraie que la théorie ne peut démontrer.
(ROSSER $\rightarrow$ indécidable)

Le second théorème d'incomplétude de GÖDEL : $(M \nvdash \perp) \Longrightarrow M \nvdash (\ulcorner M \nvdash \perp \urcorner)$
Si la machine M est consistante alors M ne peut prouver sa consistance.
auto-référence

Prédicat arithmétique de prouvabilité (*beweisbar* : prouvable) :
$\mathrm{Bew}(x) := \exists y \mathrm{Bew}'(x, y)$ (y "code" une preuve de x)
$\mathrm{Bew}'(x, y)$ est récursif
C'est décidable.

$\exists y \mathrm{Bew}'(x, y)$ est semi-décidable (s'il existe elle finit par le trouver)

$M \vdash p$
$\mathrm{Bew}(\ulcorner p \urcorner)$ (relatif à M)

Commentaire personnel

{formule logique} $\longrightarrow$ {nombre de GÖDEL} $\longrightarrow \{\perp, \top\}$

Second théorème d'incomplétude de GÖDEL :
$\neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \perp \urcorner) \longrightarrow \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \perp \urcorner) \urcorner)$
Mais la machine sait le prouver : $M \vdash \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \perp \urcorner) \longrightarrow \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \perp \urcorner) \urcorner)$
$M \vdash \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg p \urcorner) \longrightarrow \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg p \urcorner) \urcorner)$
La machine ne sait jamais pas prouver les formules $\neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \ldots \urcorner)$

$\neg \Box \neg p \longrightarrow \neg \Box \neg \Box \neg p$
$\Diamond p \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \Diamond \Box \neg p \\ \neg \Box \Diamond p \end{array} \right.$

$\Box$: prouvabilité (notion de nécessité)
$\Diamond$: consistance (notion de possibilité)

$\Diamond\top \longrightarrow \neg\Box\Diamond\top$
$\Box\Diamond\top \longrightarrow \neg\Diamond\top$
$\Box\Diamond\top \longrightarrow \Box\bot$
Il n'y a que les fous qui savent (se) prouver qu'ils sont sain d'esprit.

$(p \to q) \longleftrightarrow (\neg p \vee q)$

$\neg\Box\bot$
$\Box\bot \longrightarrow \bot$

$\Box(\Box\bot \to \bot) \longrightarrow \Box\bot$
cas particulier de la formule de Löb : $\Box(\Box p \to p) \longrightarrow \Box p$

Machine correcte : $\Box p \longrightarrow p$ $\quad$ ($\Longrightarrow$ consistance)
Est-ce que c'est prouvable ? C.-à-d. $\Box(\Box p \to p)$?
Faux en général.
$(\Box p \wedge p) \longrightarrow p$
$(\Box p \wedge p) \longleftrightarrow \Box p$
mais $M \nvdash (\Box p \wedge p) \longleftrightarrow \Box p$

On suppose par défaut que la machine est correcte et honnête
(donc sous-entendu p est vrai)
p vérité
$\Box p$ prouvabilité
$\Box p \wedge p$

Excursus : M $\boxed{\begin{array}{l}\text{PA}\\ \Diamond_{\text{PA}}\top\end{array}}$ $\Longleftarrow (\Box p \to p)$
M est consistante : $\Diamond_{M}\top$
mais $\neg\Box\Diamond_{M}\top$

M' $\boxed{\begin{array}{l}M\ \boxed{}\\ \Diamond_{M}\top\end{array}}$ $\qquad$ M'' $\boxed{\begin{array}{l}M\ \boxed{}\\ \Diamond_{M''}\top\end{array}}$ (on peut le faire par diag.)

M est consistante $\qquad$ M'' est inconsistante
$\Rightarrow M'$ est consistante
et plus efficace

$M \vdash \Box(p \leftrightarrow \Diamond p) \longleftrightarrow \Box(p \leftrightarrow \bot)$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ p\end{array}}{\Box p \longrightarrow p} \qquad \text{Règle de Löb : } \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Box p \longrightarrow p\end{array}}{p}$$

L'incomplétude force les nuances suivantes :

p	vérité		
$\Box p$	prouvabilité		
$\boxdot p := \Box p \wedge p$	connaissabilité		
$\boxed{\circ} p := \Box p \wedge \Diamond p$	observabilité	$\xleftrightarrow{\text{(modèle de Kripke)}}$	$\Box p \wedge \Diamond \top$
$\boxed{\odot} p := (\Box p \wedge p) \wedge \Diamond p$	sensibilité	$\xleftrightarrow{\text{(modèle de Kripke)}}$	$(\Box p \wedge p) \wedge \Diamond \top$

<table>
<tr><th></th><th>prouvable
(terrestre, discursif)</th><th>vrai
(divin)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">primaire</td><td colspan="2">p</td></tr>
<tr><td>$\Box p$ G
discours à la 3e personne</td><td>$\Box p$ G*</td></tr>
<tr><td>interprétation de Plotin
par saint Augustin</td><td>$\Box p \wedge p$ S4Grz = S4Grz*
l'âme (soi qui n'a pas de nom)
un pied dans la matière</td></tr>
<tr><td rowspan="2">secondaire</td><td>$\Box p \wedge \Diamond \top$ Z
matière intelligible</td><td>$\Box p \wedge \Diamond \top$ Z*
matière intelligible</td></tr>
<tr><td>$(\Box p \wedge p) \wedge \Diamond \top$ X
matière sensible</td><td>$(\Box p \wedge p) \wedge \Diamond \top$ X*
matière sensible</td></tr>
</table>

p et $\Box p \wedge p$ ne sont pas définissables par la machine.
On sait définir les hypostases 2 à 8 dans G.
S4Grz : logique temporelle, intuitionniste.
Âme : petit barbare.
Pour Everett la matière apparaît à droite.
L'interprétation d'Everett de la mécanique quantique apparaît dans Z*.

$p \longrightarrow \Box p$
La Σ_1-vérité ($\exists x P(x)$) est définissable par la machine.

consistance : $\Diamond \top$
$\iff \top \to \Diamond \top$
$\iff \Box \bot \to \bot$

inconsistance : $\Box \bot$
$\iff \bot \to \Box \bot$
$\iff \Diamond \top \to \top$

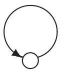
correction : $\forall p : \Box p \longrightarrow p$
$\overset{\text{contraposition}}{\iff} \quad p \longrightarrow \Diamond p$
$\overset{\text{MP}}{\Longrightarrow} \quad \Diamond \top$

26 Samedi 9 juin 2007 : Siena's Slides

A Purely Arithmetical, yet Empirically Falsifiable,
Interpretation of PLOTINUS' *Theory of Matter*
Siena

ARISTOTE : R = WYS (reality is what you see)

PLATO : WYS = could be shadow of deeper R ?

Deeper R ? 

Modernity, news :
2 creative bombs

- Universal Machine
  (toutes les UM classiques savent se simuler les unes les autres en temps polynômial)
- the other UM : (quantic computer)

bit
$\uparrow \downarrow \downarrow^{\star}$
qubit
(On peut expliquer le bit à partir du qubit.
Le travail de Bruno MARCHAL tend à expliquer le qubit à partir du bit.)

Commentaire personnel

Une boule roule *sur* le sol, bute *contre* un mur.
Où est l'"esprit" qui *porte* la boule, qui l'arrête *contre* le mur ?

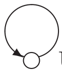
---

quanta :
qualia : qualité sensible (quanta incommunicable) (car relative au sujet ?)
GOETHE >< NEWTON : théorie de la lumière

Emil Post : 1921

Gödel   Löb   Solovay
(Magari (un des découvreurs de G), Kuznetsov)

$\Box(\Box p \to p) \longrightarrow \Box p$

$\Longrightarrow$  UM

$$\begin{aligned} UM \nvdash\ & (\Box p \wedge p) \longleftrightarrow \Box p \\ & (\Box p \wedge \Diamond p) \longleftrightarrow \Box p \\ & (\Box p \wedge \Diamond p \wedge p) \longleftrightarrow p \\ & \ldots \end{aligned}$$

The Undecidable[7] (Martin Davis/ Dover) : articles originaux de Gödel, Church, Turing, Rosser, Kleene, Post.

Gödel : consistance $\Longrightarrow$ il existe une proposition non prouvable
Rosser : omega consistance $\Longrightarrow$ il existe une proposition non prouvable et dont la négation est aussi non prouvable

Note de bas de page de Post : anticipe … et son erreur…

$M \vdash A$: la machine M prouve le théorème A

$\underbrace{\text{“}M \ \vdash 1+1=2\text{”}}$
Il existe un prédicat de l'arithmétique du premier ordre de la prouvabilité.

$B(1+1=2)$ (B est relatif à la machine M)

$\dfrac{M \ \vdash B(1+1=2)}{M \ \vdash 1+1=2}$ si M correcte $\dfrac{M \ \vdash Bp}{M \ \vdash p}$ machine stable

$\dfrac{M \ \vdash 1+1=2}{M \ \vdash B(1+1=2)}$ principe d'introspection (awareness)

$\boxed{\begin{array}{l} PA \\ Bf \end{array}}$ reste consistant car
| Bf
| $Bf \longrightarrow f$
| $\neg Bf$
| contredit le théorème de Gödel

Bp est noté $\Box p$

7. http://books.google.com/books?id=qW8x7sQ4JXgC

$\neg\Box p$ je ne sais pas prouver p	$\Diamond\neg p$ la négation de p est consistante car sinon on aurait : $M + (\neg p) \vdash \bot$ $M \vdash (\neg p) \longrightarrow \bot$ $M \vdash \neg\neg p$ $M \vdash p$ KO	$\Box$: nécessité (nature aléthique)

Second théorème d'incomplétude de Gödel :

$\neg\Box\bot \longrightarrow \neg\Box(\neg\Box\bot)$

$\Diamond\top \longrightarrow \Diamond\Box\bot$

$\Box\bot \vee \Diamond\Box\bot$ $\qquad\qquad$ $(p \to q) \longleftrightarrow (\neg p \vee q)$

$\neg\Diamond\Box\bot \longrightarrow \neg\Diamond\top$

$\Box\Diamond\top \longrightarrow \Box\bot$

$\Box(\Box\bot \to \bot) \longrightarrow \Box\bot$ $\qquad\qquad$ $(\Box\bot \to \bot) \longleftrightarrow (\Diamond\top \vee \bot) \longleftrightarrow \Diamond\top$

27 Samedi 16 juin 2007 : Siena's Slides 2

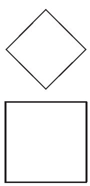
p
$\Box p$
$\Box p \wedge p$
$\Box^{\alpha} p \wedge \Diamond^{\beta} p$
$\Box^{\alpha} p \wedge \Diamond^{\beta} p \wedge p$

(Ce sont les mêmes propositions de l'arithmétique
mais du point de vue de la machine elles sont différentes.)

TRUTH	ONE
prouvability	INTELLECT
knowability	SOUL
observability	INTELLIGIBLE MATTER
sensitivity	SENSITIVE MATTER

$\alpha < \beta < \omega_1^{CK}$

(Les 8 hypostases…)



MECANISM : $G + p \longrightarrow \Box p$
$= G1 \qquad (\Sigma_1)$

CONSCIENCE :
…

Commentaire personnel

conscience en anglais : sens moral
consciousness, awareness : “connaissance”

La connaissance (SOUL) obéit à une logique non-gödelienne :

$\boxdot p := \Box p \wedge p$
$\diamonddot p = p \vee \Diamond p$
$\diamonddot \top = \top \vee \Diamond \top$

$\cancel{\Box \neq \boxdot}$ $\qquad \neg(\Box = \boxdot)$

Si la machine infère $\Diamond \top$: M' $\boxed{M \; \Box \; \Diamond_M \top}$ $\qquad M''$ $\boxed{M \; \Box \; \Diamond_{M''} \top}$ (on peut le faire par diag.)

M est consistante
$\Rightarrow M'$ est consistante
et plus efficace

M'' est inconsistante

Benacerraf sent qu’on peut corriger Lucas (erreur que Penrose va refaire).

Commentaire personnel

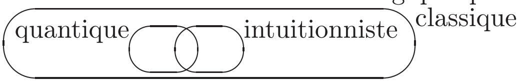
Is Mathematical Insight Algorithmic ? [8] (Martin Davis, 22 mars 1995)
How Subtle is Gödel’s Theorem More on Roger Penrose [9] (Martin Davis) :
“Gödel understood very well, what Penrose seems to have missed, that a Platonist position concerning mathematical entities is perfectly consistent with a mechanist view of mind.
[. . .]
To repeat what I said in my first commentary on Penrose (Davis 1990): the question of whether mathematical insight is the product of an algorithmic process is an important and difficult question. But Gödel’s theorem has nothing to say about it.”

Th. de Gödel : si on est une machine saine
alors on ne sait pas quelle machine on est.

$\vdots$
• 2ω
$\vdots$ $\qquad$ bien fondé car il y a un plus petit élément dans chaque sous-ensemble
• ω
$\vdots$
• 0

8. http://www.cs.nyu.edu/cs/faculty/davism/penrose.ps
9. http://www.cs.nyu.edu/cs/faculty/davism/penrose2.ps

von Neumann et Birkhoff : logique quantique (il n'y a pas d'implication)



Logique B : | K $\Box(A \to B) \longrightarrow (\Box A \to \Box B)$
| T $\Box A \longrightarrow A$ (Feys-von Wright)
| B $A \longrightarrow \Box\Diamond A$
| avec MP et NEC

Goldblatt : $\mathrm{MQL} \vdash A$
$\iff \mathrm{B} \vdash \Box\Diamond A$

Artemov : $\Box p \wedge p$

Logique B^- : | K
| T
| $p \longrightarrow \Box\Diamond p$
| $\Box A \longrightarrow \Box\Diamond\Box A$
| avec MP (sans NEC)

Σ_1 : $\exists x\ A(x)$ avec A récursif
Π_1 : $\forall x\ A(x)$

Commentaire personnel

La cohérence est une propriété récessive : $\forall$
La démontrabilité est une propriété expansive : $\exists$

« Le récessif c'est l'ordinateur qui mouline, c'est la non-contradiction (attendre le bus).
L'expansif c'est la démonstration, c'est le contre-exemple (dire zut). »

(Jean-Yves Girard)

28 Samedi 30 juin 2007 : Commentaires Sienne ; Combinateurs

The Undecidable[10] (Martin Davis)

Commentaire personnel

Point fixe de Descartes $\Longrightarrow$ vérités relatives à ce point fixe

La science c'est des certitudes locales, relativement, relationnellement à ...

Liesbeth De Mol

...

10. http://books.google.com/books?id=qW8x7sQ4JXgC

Combinateurs de Curry-Schönfinkel

Le langage n'est constitué que des quatres symboles K, S, (et)

- K est un combinateur
- S est un combinateur
- Si x et y sont des combinateurs alors $(x\ y)$ est un combinateur

On abrévie $((x\ y)\ z)$ en xyz. $\quad$ ($x, y, z, \ldots$ sont des métavariables)
En général $xyz \neq x(yz)$

Axiomes :
$$\mathsf{K}xy = x$$
$$\mathsf{S}xyz = xz(yz)$$

On peut évaluer dans n'importe quel ordre...

Donc $\mathsf{SKSK} = \mathsf{KK}(\mathsf{SK}) = \mathsf{K}$

Cherchons I tel que $\mathrm{I}x = \mathbf{x}$.
$\forall y : \mathsf{SK}yx = \mathsf{K}xyx = x$ $\quad$ Existe-t-il d'autres solutions stables ?
$\mathrm{I} := \mathsf{SKK}$

Cherchons B tel que $\mathrm{B}xyz = x(yz)$.
$\mathrm{B} := \mathsf{S}(\mathsf{KS})\mathsf{K}$ $\quad$ car $\mathsf{S}(\mathsf{KS})\mathsf{K}xyz = \mathsf{KS}x(\mathsf{K}x)yz = \mathsf{S}(\mathsf{K}x)yz = \mathsf{K}xz(yz) = x(yz)$

Commentaire personnel

(Calculabilité) Turing Universel
$\sim$ combinateurs $\sim$ logique sans sémantique (démontrabilité ?)

---

29 Samedi 7 juillet 2007 : Futurs articles ; Combinateurs

Futurs articles qu'il compte écrire :

1. *Olympia's revenge. A rejoinder to* Maudlin & Barnes (Journal of Philosophy) : sur le graphe filmé.
   On ne peut pas assimiler la conscience à l'activité physique de la machine sur laquelle tourne...
2. *The Universal Dovetailer Argument.*
3. *The Testable (Plotinian) Theology of the Universal Machine* : sur les hypostases de Plotin et peut-être la thèse de Church.
4. *Footnote* 118 : sur la thèse de Church.

Combinateurs

$\mathsf{B}xyz = x(yz)$
Avec des "fonctions" : $\mathsf{BFG}x = \mathsf{F}(\mathsf{G}x)$ "=" $(\mathsf{F} \circ \mathsf{G})(x)$
BFG "=" $\mathsf{F} \circ \mathsf{G}$

$BTW = S(KT)W$

$$\lambda x \lambda y\ (x+y)4 \longrightarrow \lambda y\ (4+y)$$

$SKKS = KS(KS) = S$

Cherchons :

I	tel que $Ix = \mathbf{x}$	
M	tel que $Mx = xx$	
B	tel que $Bxyz = x(yz)$	
W	tel que $Wxy = xyy$	grand duplicateur (Warbler/ fauvette, pouillot)
L	tel que $Lxy = x(yy)$	(Lark/ alouette)
C	tel que $Cxyz = xzy$	grand permutateur (Cardinal)
...		

I tel que $Ix = \mathbf{x}$?
$Kxy = x$
$Kx(\dots)$
$Kx(\dots x) \longleftarrow SK(\dots)x$
Par exemple : $Kx(Kx) = SKKx$ ou $Kx(Sx) = SKSx$
$I := SKK$

M tel que $Mx = xx$?
$M := SII = S(SKK)(SKK)$

$MM = MM$
infinity $= \Omega := MM = SII(SII) = S(SKK)(SKK)\,[S(SKK)(SKK)]$

Dans [Theoretical computer science] :

- leçon de Newton : tout est réversible dans la nature
  $\Longrightarrow$ pas d'éliminateur
- leçon de EPR-Bell-Watters-Zurech : no cloning theorem
  $\Longrightarrow$ pas de duplicateur

Donc pour les physiciens, il n'y a ni Kestrel, ni Starling
(logique de la relevance : on doit compter l'utilisation des éléments)

Si on garde S : "base" sans K : $BCIW$ ou $BCIM$

BCI-algèbre : calcul lambda linéaire

$K_i AB$ "$\longrightarrow$" A éliminateur local $\{A, B, C, \dots\}$

Commentaire personnel

Tiré du forum [CandiULB] : *To Mock a Mockingbird* (Raymond Smullyan) : On est dans une forêt enchantée habitée par de curieux oiseaux. $(a\ b)$ représente la réponse de l'oiseau a lorsqu'on lui présente l'oiseau b.

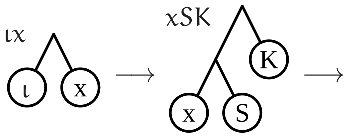
$\forall a, b, \exists c, \forall x :\ cx = a(bx)$ on dit que l'oiseau c compose a et b

L'oiseau moqueur M est tel que $\forall x : Mx = xx$

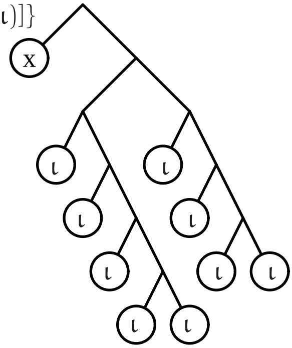
On dit que l'oiseau a est épris de l'oiseau b lorsque $ab = b$.
$\forall a, \exists b :\ ab = b$ car $\exists c :\ cx = a(Mx)$ et donc $cc = a(Mc) = a(cc)$

$BaM(BaM) = a\,[M(BaM)] = a\,[BaM(BaM)]$
$= La(La) = a\,[La(La)]$
$= SLLa = a(SLLa)$
$= BMLa = M(La)$
$BML = S(KM)L$

Bases : $\{K, S\}$ ou $\{B, C, K, W\}$ ou $\{\iota\}$ ou ...



$x\,(\iota\{\iota\,[\iota(\iota\iota)]\})\,\{\iota\,[\iota(\iota\iota)]\}$



$\iota = S\,[O(KS)]\,(KK) = S\,[S(SKK)(KS)]\,(KK)$
$\iota x = xSK = x\,(\iota\{\iota\,[\iota(\iota\iota)]\})\,\{\iota\,[\iota(\iota\iota)]\}$

$\iota\iota = \iota SK = SSKK = SK(KK) = I_{KK}$
$\iota(\iota\iota) = \iota I_{KK} = I_{KK}SK = SK$
$\iota\,[\iota(\iota\iota)] = \iota(SK) = SKSK = KK(SK) = K$
$\iota\{\iota\,[\iota(\iota\iota)]\} = \iota K = KSK = S$

$WK = SKI = I_I$
$WKK = SKIK = KK(IK) = KKK = K$
$WKS = SKIS = KS(IS) = KSS = S$

$WS = SSI$
$WSK = SSIK = SK(IK) = SKK = I$
$WSS = SSIS = SS(IS) = SSS$

$Yx = x(Yx) = x\,[x(Yx)] = \ldots$
$YI = I(YI) = YI = \ldots$

$TK\left|\begin{matrix} I \\ S \end{matrix}\right| xy = \left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ `if` $(I|S)$ `then` x `else` y

$\left.\begin{matrix} K \\ \perp \end{matrix}\right| xy = \left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$
$K \perp xyz = \perp yz = z$
$\perp Kx = x$

not $K = K \perp K = \perp$
not $\perp = \perp(\perp I)K = IK = K$

not $B = B(BI)K = S\,[K(BI)]\,K$
    not $Bx = S\,[K(BI)]\,Kx = K(BI)x(Kx)$
    not $Bxy = K(BI)x(Kx)y = BI(Kx)y = I(Kxy) = Kxy = x$
not $C = C(CI)K = S(CI)(KK)$

$\mathtt{not}\, Cx = S(CI)(KK)x = CIx(KKx) = CIxK = IKx = Kx$
$\mathtt{not}\, I = I(II)K = IIK = IK = K$
$\mathtt{not}\, L = L(LI)K = LI(KK) = I\,[KK(KK)] = KK(KK) = K$
$\mathtt{not}\,\mathtt{not} = \mathtt{not}\,(\mathtt{not}\, I)K = \mathtt{not}\, KK = K \perp KK = \perp K = I$
$\mathtt{not}\, O = O(OI)K = K(OIK) = K\,[K(IK)] = K(KK)$
$\mathtt{not}\, R = R(RI)K = BBT(RI)K = B\,[T(RI)]\,K$
$\mathtt{not}\, Rx = R(RI)Kx = Kx(RI) = x = Ix$
$\mathtt{not}\, S = SOK$
$\mathtt{not}\, Sx = SOKx = Ox(Kx) = Kx\,[x(Kx)] = x = Ix$
$\mathtt{not}\, T = T(TI)K = K(TI)$
$\mathtt{not}\, Tx = K(TI)x = TI$
$\mathtt{not}\, Txy = TIy = yI$
$\mathtt{not}\, V = V(VI)K = BCT(VI)K = C\,[T(VI)]\,K$
$\mathtt{not}\, Vx = V(VI)Kx = x(VI)K$
$\mathtt{not}\, Vxy = x(VI)Ky$
$\mathtt{not}\, Vxyz = x(VI)Kyz = x(VI)y$
$\mathtt{not}\, W = W(WI)K = WIKK = IKKK = KKK = K$
$\mathtt{not}\, Y = ?$

$\neg K = K \perp K = \perp$
$\neg \perp = \perp \perp K = K$

$\neg\neg = \neg \perp K = \perp \perp K = K$
$\neg Y = Y \perp K = \perp(Y \perp)K = K$

$K \perp xyz = z = Iz$
$K \perp x = \perp$
$K \perp xy = \perp y = I$

$SKxy = Ky(xy) = y = Iy = \perp xy$
$CKxy = Kyx = y = Iy = \perp xy$

Nombres naturels de Barendregt :
$0 := I$
$1 = V \perp I = S(T \perp) \perp$
$2 = V \perp 1 = S(T \perp)\,\{K\,[S(T \perp) \perp]\}$

$\mathtt{zero?}(\mathtt{succ}\, x) = TK(V \perp x) = V \perp xK = K \perp x = \perp$
$\mathtt{prev}(\mathtt{succ}\, x) = T \perp (V \perp x) = V \perp x \perp = \perp \perp x = x$
$\mathtt{succ}(\mathtt{prev}\, x) = V \perp (T \perp x) = S(T \perp)\,[K(T \perp x)] = S(T \perp)\,[K(x \perp)]$

$\mathtt{prev}\, 0 = 0 \perp = I \perp = \perp$
$\mathtt{prev}\, \perp = \perp \perp = I = 0$

$$\forall k \in \mathbb{N} :\ \mathtt{prev}^k\, 0 = \begin{cases} 0 & \text{si k pair} \\ \perp & \text{si k impair} \end{cases}$$

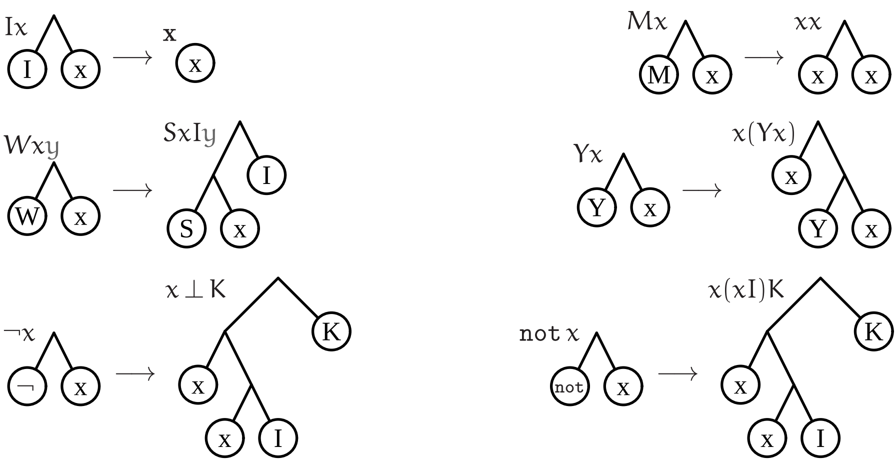
$\mathtt{zero?} \perp = \perp K = I = 0$

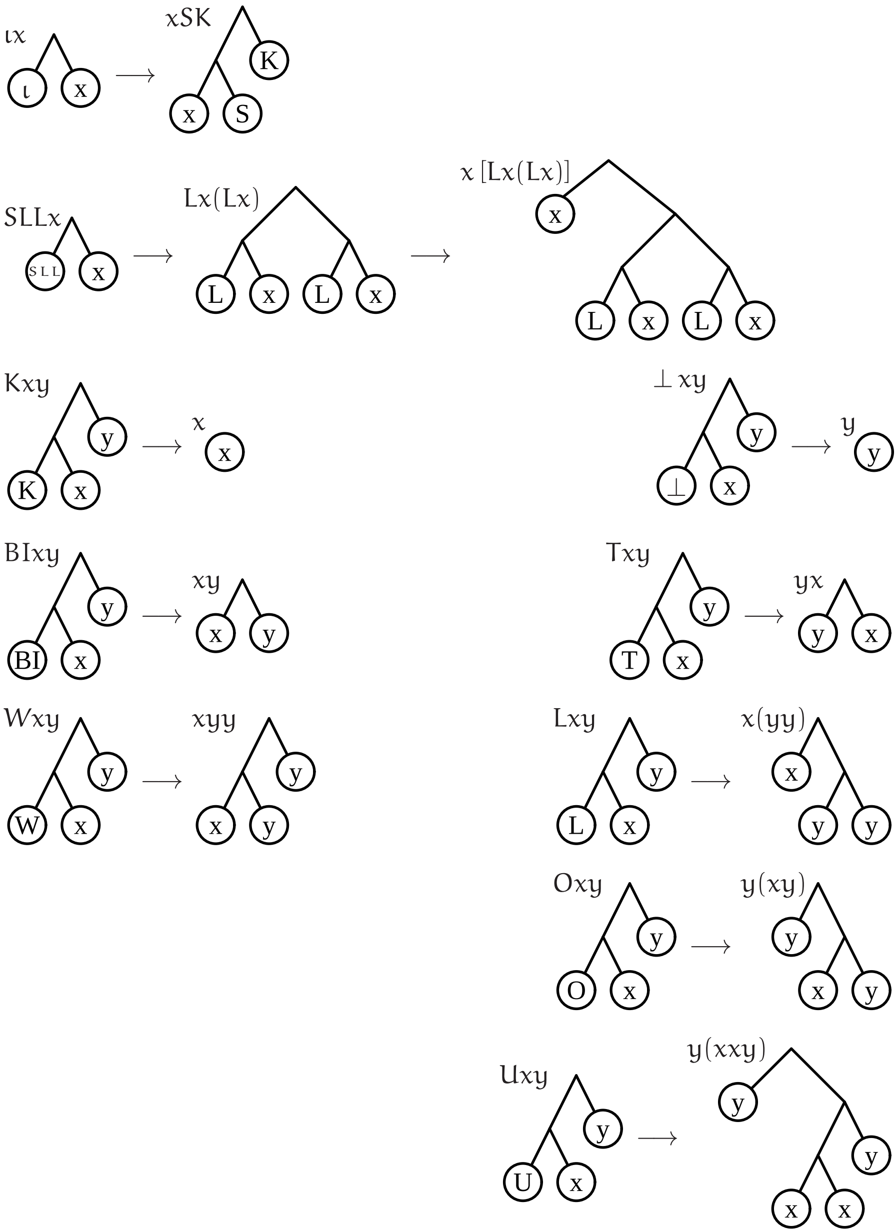
$\mathtt{succ} \perp = S(T \perp)(K \perp)$

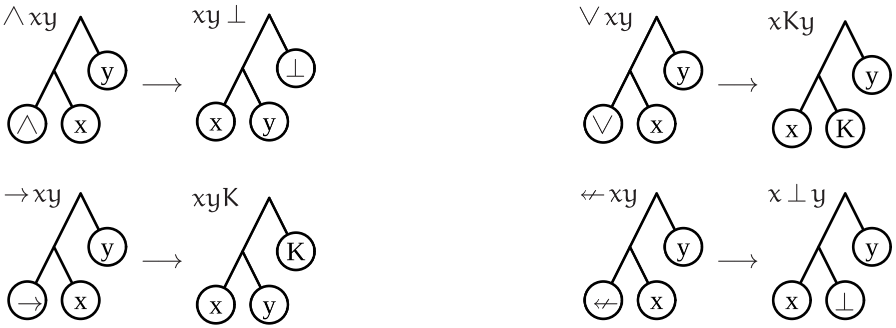
$\mathtt{succ}\, xy = V \perp xy = y \perp x$

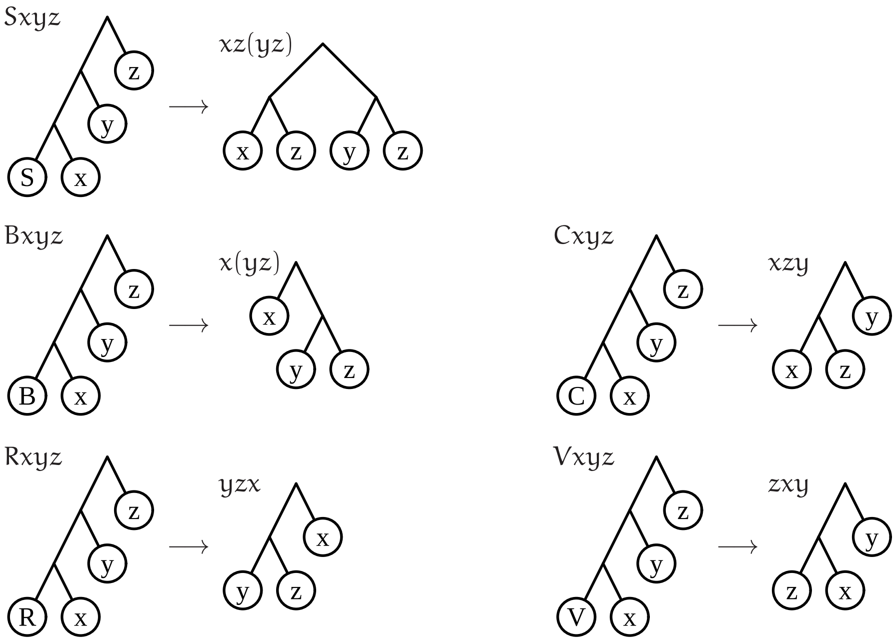
$\mathsf{K}xy = x$	$\mathsf{K} = \iota(\mathsf{SK}) = \iota\,[\iota(\iota\iota)]$	Kestrel, vrai, grand éliminateur
$\mathsf{S}xyz = xz(yz)$	$\mathsf{S} = \mathsf{B}(\mathsf{BW})(\mathsf{BBC})$ $= \iota\mathsf{K} = \iota\{\iota\,[\iota(\iota\iota)]\}$	Starling
$\mathsf{B}xyz = x(yz)$ $\mathsf{B}x = \mathsf{S}(\mathsf{K}x)$	$\mathsf{B} := \mathsf{S}(\mathsf{KS})\mathsf{K}$	Bluebird, `mul` de C., grand composeur
$\mathsf{C}xyz = xzy$ $\mathsf{C}x = \mathsf{B}(\mathsf{S}x)\mathsf{K}$ $= \mathsf{S}\,[\mathsf{K}(\mathsf{S}x)]\,\mathsf{K}$ $\mathsf{C}xy = \mathsf{S}x(\mathsf{K}y)$	$\mathsf{C} := \mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})$ $= \mathsf{S}\,[\mathsf{S}(\mathsf{KB})\mathsf{S}]\,(\mathsf{KK})$	Cardinal, grand permutateur
$\mathsf{I}_x y = \mathbf{y}$	$\mathsf{I}_x := \mathsf{SK}x$	identité
$\mathsf{I}x = \mathbf{x}$	$\mathsf{I} := \mathsf{I}_\mathsf{K} = \mathsf{SKK} = \mathsf{WSK}$	identité, naturel 0 B.
$\iota x = x\mathsf{SK}$ $\iota\iota x = x$	$\iota := \mathsf{S}\,[\mathsf{O}(\mathsf{KS})]\,(\mathsf{KK})$ $\iota\iota = \mathsf{I}_{\mathsf{KK}} = \mathsf{SK}(\mathsf{KK})$ $\iota(\iota\iota) = \mathsf{SK}$	iota de Chris Barker (permet à lui seul de définir K et S)
$\mathsf{L}xy = x(yy)$ $\mathsf{L}x = \mathsf{B}x\mathsf{M}$	$\mathsf{L} := \mathsf{CBM} = \mathsf{SB}(\mathsf{KM})$	Lark
$\mathsf{M}x = xx$	$\mathsf{M} := \mathsf{SII} = \mathsf{OI} = \mathsf{WI}$	Mockingbird, duplicateur
$\mathsf{O}xy = y(xy)$	$\mathsf{O} := \mathsf{SI}$	Owl
$\Omega x = \Omega x$	$\Omega := \mathsf{MM} = \mathsf{IM}(\mathsf{IM})$	infini (non stable)
$\mathsf{R}xyz = yzx$ $\mathsf{R}x = \mathsf{B}(\mathsf{T}x)$	$\mathsf{R} := \mathsf{BBT} = \mathsf{S}(\mathsf{KB})\mathsf{T}$	Robin (rotation gauche)
$\mathsf{T}xy = yx$ $\mathsf{T}x = \mathsf{O}(\mathsf{K}x)$	$\mathsf{T} := \mathsf{BOK} = \mathsf{CI} = \mathsf{S}(\mathsf{KO})\mathsf{K}$	
$\mathsf{U}xy = y(xxy)$ $\mathsf{U}x = \mathsf{O}(xx)$	$\mathsf{U} := \mathsf{LO} = \mathsf{BOM}$	Turing bird
$\mathsf{V}xyz = zxy$ $\mathsf{V}x = \mathsf{C}(\mathsf{T}x)$ $\mathsf{V}xy = \mathsf{S}(\mathsf{T}x)(\mathsf{K}y)$	$\mathsf{V} := \mathsf{BCT} = \mathsf{S}(\mathsf{KC})\mathsf{T}$	Vireo (rotation droite)
$\mathsf{W}xy = xyy$ $\mathsf{W}x = \mathsf{S}x\mathsf{I}$	$\mathsf{W} := \mathsf{SS}\perp$	Warbler, grand duplicateur
$\mathsf{Y}x = x(\mathsf{Y}x)$ $\mathsf{Y}'x = x(\mathsf{Y}'x)$	$\mathsf{Y} := \mathsf{S}(\mathsf{KM})\,[\mathsf{SB}(\mathsf{KM})]$ $\mathsf{Y}' := \mathsf{SSK}\,[\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\{\mathsf{SS}\,[\mathsf{S}(\mathsf{SSK})]\})\,\mathsf{K}]$	paradoxal

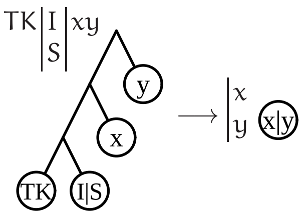
$\top xy = x$	$\top := \mathsf{K}$	vrai
$\bot xy = y$ $\bot x = \mathrm{I}$	$\bot := \mathsf{KI}$	faux, naturel 0 de Church
$\neg x = x \bot \mathsf{K}$	$\neg := \mathsf{V} \bot \mathsf{K} = \mathsf{C}(\mathsf{T} \bot)\mathsf{K}$ $= \mathsf{S}\,[\mathsf{O}(\mathsf{K} \bot)]\,(\mathsf{KK})$	négation booléenne
$\mathtt{not}\, x = x(x\mathrm{I})\mathsf{K}$	$\mathtt{not} := \mathsf{C}\,[\mathsf{O}(\mathsf{TI})]\,\mathsf{K}$ $= \mathsf{S}\,[\mathsf{O}(\mathsf{O} \bot)]\,(\mathsf{KK})$	“ma” négation booléenne
$\wedge xy = xy \bot$	$\wedge := \mathsf{R} \bot = \mathsf{S}\{\mathsf{K}\,[\mathsf{O}(\mathsf{K} \bot)]\}$	conjonction booléenne
$\vee xy = x\mathsf{K}y$ $\vee x = x\mathsf{K}$	$\vee := \mathsf{TK} = \mathsf{O}(\mathsf{KK})$	disjonction booléenne
$\to xy = xy\mathsf{K}$	$\to := \mathsf{RK} = \mathsf{S}\{\mathsf{K}\,[\mathsf{O}(\mathsf{KK})]\}$	implication booléenne
$\not\leftarrow xy = x \bot y$ $\not\leftarrow x = x \bot$	$\not\leftarrow := \mathsf{T} \bot = \mathsf{O}(\mathsf{K} \bot)$	négation de l’implication réciproque
$0\, x = x$	$0 := \mathrm{I} = \mathsf{SKK}$	0 de Barendregt
$\mathtt{succ}\, x$ $= \mathsf{S}(\mathsf{T} \bot)(\mathsf{K}x)$	$\mathtt{succ} := \mathsf{V} \bot = \mathsf{C}(\mathsf{T} \bot)$	successeur de B.
$\mathtt{prev}\, x = x \bot$	$\mathtt{prev} := \mathsf{T} \bot = \mathsf{O}(\mathsf{K} \bot)$	prédécesseur de B.
$\mathtt{zero?}\, x = x\mathsf{K}$	$\mathtt{zero?} := \mathsf{TK} = \mathsf{O}(\mathsf{KK})$	prédicat $= 0$ de B.
$0\, x = \mathrm{I}$	$0 := \mathsf{K}\mathrm{I} = \bot$	0 de Church
$\mathtt{succ}\, x = \mathsf{SB}x$	$\mathtt{succ} := \mathsf{SB} = \mathsf{S}\,[\mathsf{S}(\mathsf{KS})\mathsf{K}]$	successeur de C.
$\mathtt{add}\, x\, y = \mathsf{S}(\mathsf{BB}x)y$ $\mathtt{add}\, x = \mathsf{S}(\mathsf{BB}x)$	$\mathtt{add} := \mathsf{BS}(\mathsf{BB})$ $= \mathsf{S}(\mathsf{KS})\,[\mathsf{S}(\mathsf{KB})]$	addition de C.
$\mathtt{mul}\, x\, y = \mathsf{S}(\mathsf{K}x)y$ $\mathtt{mul}\, x = \mathsf{S}(\mathsf{K}x)$	$\mathtt{mul} := \mathsf{B}$	multiplication de C.
$x\, y$		x^y (pour x et y naturels de C.)




ιx
xSK
SLLx
Lx(Lx)
x [Lx(Lx)]
Kxy
x
⊥ xy
y
BIxy
xy
Txy
yx
Wxy
xyy
Lxy
x(yy)
Oxy
y(xy)
Uxy
y(xxy)


∧ xy
xy ⊥
∨ xy
xKy
→ xy
xyK
↚ xy
x ⊥ y


Sxyz
xz(yz)
Bxyz
x(yz)
Cxyz
xzy
Rxyz
yzx
Vxyz
zxy


TK|I S|xy
|x y x|y

30 Samedi 14 juillet 2007 : [Statuts ;] Combinateurs

BCI-algèbre : pas d'éliminateur, ni de duplicateur
(composeur, permutateur, identité)

Calcul lambda planaire
Abramsky

$I := SKK$	$Ix = \mathbf{x}$
$M := SII = S(SKK)(SKK)$	$Mx = xx$
$\Omega := MM = SIIM = IM(IM) = MM$	
$B := S(KS)K$	$Bxyz = x(yz)$

Exercice de Smullyan : dans toute forêt avec B et M, chaque combinateur à un point fixe.

Cherchons C tel que $Cxyz = xzy$

Méthode de Michel Boelen :

- Utiliser S
- Éliminer les ()
  Décomposition
- Intercalaire : $Ax\underbrace{B}_{KBx}$

$$SA(KB)x = Ax(KBx)$$

$xzy = xz(Kyz) = Sx(Ky)z = B(Sx)Kyz$
$= BBSxKyz$
$= \underbrace{BBS}_{A}\,x\,\underbrace{(KKx)}_{KBx}\,yz = S(BBS)(KK)xyz$
Ce qui nous donne $C = S(BBS)(KK)$

Colle : évaluer $KS\Omega$
Si on ne se pose pas de question $KS\Omega = S$
Mais si on voulait d'abord développer Ω :

$$KS\Omega = KS(MM) = KS(SIIM) = KS\,[IM(IM)] = KS(MM) = \ldots$$

Commentaire personnel

$KS\Omega$ admet une forme normale alors que sa partie Ω n'en n'admet pas !

30.1 Lambda-calcul

Un λ-terme est soit :
une λ-variable : $x, y, z, \ldots$
une λ-abstraction :
si x est une λ-variable et u un λ-terme alors $\lambda x.u$ est un λ-terme
une λ-application : si u et v sont des λ-termes alors uv est un λ-terme

31 Samedi 28 juillet 2007 : [Lettre ;] Combinateurs

Algèbre applicative ?

Propriété de Church–Rosser : chaque “ordre d'évaluation qui termine” aboutit à la même forme normale.
Un combinateur possède une forme normale ssi “l'ordre d'évaluation en commençant par la gauche termine”.

32 Samedi 18 août 2007 : Diagonalisation

...

33 Samedi 1er septembre 2007 : Computationnalisme ; Ordinaux transfinis

...

34 Samedi 8 septembre 2007 : Histoire ; Bijection

...

35 Samedi 15 septembre 2007 : Diagonalisation

[Absent]

36 Samedi 22 septembre 2007 : Calculabilité – Prouvabilité

...

chutier

"La matière était déjà là, pensons-nous, bien avant l'esprit, et il est difficile de croire qu'elle n'est que le produit d'une activité mentale. Mais vrai ou faux, ce n'est pas pour cause d'absurdité patente qu'on peut refuser l'idéalisme."

(*Problèmes de philosophie*/ Bertrand Russell, 1912)

"Whitehead m'a convaincu que la notion de matière est une fiction logique, c'est-à-dire quelque chose dont on peut se dispenser : un fragment de matière peut être traité comme un système d'événements liés situés dans différentes parties du continuum spatio-temporel.
[...]
Dans *Problèmes de philosophie*, j'ai fait l'hypothèse de l'existence du sujet, et j'ai traité l'expérience directe comme une relation entre le sujet et l'objet. À présent je fais du sujet une construction logique. En conséquence, il faut abandonner la distinction entre sensation et sense-data ; je rejoins à présent sur ce point William James et l'école du réalisme américain. On trouvera dans mon ouvrage *L'Analyse de l'esprit* les changements qui en résultent dans la théorie de la connaissance."

(*Introduction à la traduction allemande*/ Bertrand Russell, 1924)

"Je suis prêt à parier qu'on s'apercevra un jour que la réalité matérielle se situe en fait à l'intérieur de la réalité mathématique."

(Alain Connes)

Théorie formelle...

- Une **proposition est démontrable** (ou prouvable) dans une théorie formelle si il existe une suite (finie ?) de propositions partant des axiomes de cette théorie et aboutissant à cette proposition.
- Une **proposition est réfutable** si son ajout à une théorie formelle consistante entraîne une contradiction.
- Une **proposition est décidable** si elle est démontrable ou réfutable.

- Une **théorie formelle est correcte** si toute proposition démontrable est vraie.
- Une **théorie formelle est consistante** si une proposition et sa négation ne peuvent être vraies ensembles.
- Une **théorie formelle est complète** si toute proposition vraie est démontrable.

La longue histoire de la matière (Jacques Reisse/ PUF)
Les postulats philosophiques du matérialisme historique (mémoire de Claude Lévi-Strauss)

Les indispensables de la Mécanique quantique (Roland Omnès, Odile Jacob 2006)

Annexes

Liste des personnalités évoquées

~ −580 – ~ −500 : Pythagore de Samos

~ −428 – ~ −347 : Platon

~ −385 – −322 : Aristote

~ 205 – ~ 270 : Plotin

354 – 430 : saint Augustin

1564 – 1642 : Galileo Galilei, dit Galilée

1596 – 1650 : René Descartes

1629 – 1695 : Christiaan Huygens

1642 – 1727 : Isaac Newton

1646 – 1716 : Gottfried Wilhelm Leibniz

1749 – 1832 : Johann Wolfgang von Goethe

1773 – 1829 : Thomas Young

1792 – 1871 : Charles Babbage

1815 – 1852 : Ada Lovelace

1842 – 1891 : Édouard Lucas

1845 – 1918 : Georg Cantor

1854 – 1912 : Henri Poincaré

1858 – 1932 : Giuseppe Peano

1858 – 1947 : Max Planck

1861 – 1947 : Alfred North Whitehead

1871 – 1953 : Ernst Zermelo

1872 – 1970 : Bertrand Russell

1879 – 1955 : Albert Einstein

1882 – 1970 : Max Born

1884 – 1944 : George David Birkhoff

1885 – 1962 : Niels Bohr

1888 – 1971 : James Waddell Alexander II

1889 – 1942 : Moses Schönfinkel

1889 – 1961 : Robert Feys

1891 – 1965 : Abraham Adolf Fraenkel

1893 – 1971 : Kurt Reidemeister

1896 – 1966 : Boris Podolski

1897 – 1954 : Emil Post

1900 – 1982 : Haskell Brooks Curry

1902 – 1983 : Alfred Tarski

1902 – 1984 : Paul Dirac

1903 – 1957 : John von Neumann

1903 – 1995 : Alonzo Church

1906 – 1978 : Kurt Gödel

1907 – 1989 : John Barkley Rosser

1908 – : Claude Lévi-Strauss

1909 – 1994 : Stephen Cole Kleene

1909 – 1995 : Nathan Rosen

1911 – 1995 : Raphael M. Robinson

1912 – 1954 : Alan Mathison Turing

1916 – 2003 : Georg Henrik von Wright

1919 – : Raymond Smullyan http://www.indiana.edu/~phil/Faculty/Individual Pages/Smullyan.html

1921 – 2006 : Martin Hugo Löb

1928 – : Martin Davis http://www.cs.nyu.edu/cs/faculty/davism/

1930 – 1982 : Hugh Everett

1931 – : Roger Penrose

1931 – : Roland Omnès

1940 – : Saül Aaron Kripke

1945 – : Louis H. Kauffman http://www2.math.uic.edu/~kauffman/

1947 – : Hendrik Pieter (Henk) Barendregt

1947 – : Alain Connes

~ 1951 – : Sergei N. Artemov http://web.cs.gc.cuny.edu/~sartemov/

1953 – : Samson Abramsky

1955 – : Bruno Marchal

? – : E. Barnes 1991

? – : Chris Barker

? – : J. S. Bell 1964, 1987

? – : Paul Benacerraf 1967

? – : James R. Brown 1991

? – : Liesbeth De Mol

? – : Robert Goldblatt 1974, 1978, 1993

? – : Andrzej Grzegorczyk 1950, 1964, 1967

? – : A. V. Kuznetsov 1977

? – ? : Roberto Magari 1975

? – : Tim Maudlin 1989, 1994

? – : Jacques Reisse

? – : Craig Smoryński 1981, 1985

? – : Robert Martin Solovay 1964, 1976

? – : Watters

? – : Zurech

Références

[CandiULB] BrunoMarchal,
Cours de logique et informatique théorique 2005 – . . . [11]
Forum CandiULB, 1er octobre 2005 – . . . 23

[Universalis] **Encylopædia Universalis** [12] 10 PC/Mac, 2004. 2, 3

[Pour la Science]
La science des nœuds.
Pour la Science [13] HS15, avril 1997.

[Point Aveugle] Jean-Yves Girard [14],
Le Point Aveugle. Tome 1 : vers la perfection.

[Secret amibe] Bruno Marchal,
Le secret de l'amibe [15].
19 mai 2000. 8

[Liens] Olivier Pirson,
Liens [16]. 8

[Kauffman] Louis H. Kauffman [17].

[Larousse]
Petit Larousse illustré 1987.
Paris, Librairie Larousse, 1986. 7

[Nombres 1] Olivier Pirson,
Les Nombres : Science • Art • Théologie :
1re partie : Théologie grecque, Sommes et différences [18].
Notes à partir du séminaire 2006 – 2007 de Bruno Marchal. 1

[Mathematics Genealogy] **The Mathematics Genealogy Project** [19].

[Theoretical computer science] Bruno Marchal,
Theoretical computer science and the natural sciences [20].
Physics of Life Reviews, Vol. 2 Issue 4 December 2005, pp. 251-289. 23

[Wikipédia] **Wikipédia** [21], l'encyclopédie libre.

11. http://www.candiulb.be/forum/index.php?showtopic=23145
12. http://www.universalis.fr/
13. http://www.pourlascience.com/
14. http://iml.univ-mrs.fr/~girard/
15. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/prixlemonde/SApageWEBbest.pdf
16. http://www.opimedia.be/Bruno_Marchal/index.htm#Liens
17. http://www2.math.uic.edu/~kauffman/
18. http://www.opimedia.be/Bruno_Marchal/index.htm#Nombres1
19. http://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/
20. http://iridia.ulb.ac.be/~marchal/publications.html
21. http://fr.wikipedia.org/

Index

Table des matières

$\mathcal{DS}$TEX*tes*

mis en page sous DSTEX
le 8 janvier 2012
http://www.opimedia.be/DS/