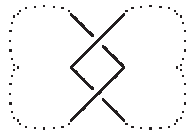
@TEXtes

mis en page sous DS-TEX
le 8 janvier 2012
http://www.opimedia.be/DS/

Liens



Work in progress

Olivier Pirson
olivier_pirson_opi@yahoo.fr
http://www.opimedia.be/

mercredi 17 mars 2010

Table des matières

1 Représentation de liens et liens **1**
- 1.1 Mouvements de Reidemeister . . . 1
- 1.2 Isotopies . . . 1

2 Opérations **2**
- 2.1 Nombre de cycles . . . 2
- 2.2 Nombre (minimal) de croisements . . . 3
- 2.3 Miroir . . . 3
- 2.4 Degré de torsion . . . 3

3 Invariant de Kauffman **5**
- 3.1 Fonction en ABd de Kauffman . . . 5
- 3.2 Fonction en A de Kauffman . . . 7
- 3.3 Invariant de Kauffman . . . 8

4 Divers **8**

Annexes **10**
- Pièces élémentaires des liens . . . 10
- Table des premiers nœuds premiers . . . 10
- Algèbres . . . 11

Références **12**

Chutier **13**

Index **15**

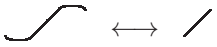
Table des matières **16**

1 Représentation de liens et liens

Considérons le plan contenant un nombre fini de courbes fermées telles que :
- en chaque point du plan passe au plus 2 courbes (interdit)
- les points sur lesquels passent 2 courbes sont séparés (interdit)
- lorsque 2 courbes passent sur un même point elles s'entrecroisent et indique laquelle passe au-dessus, comme ceci : ou (interdit).

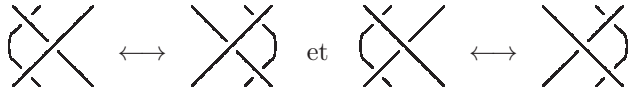
Appelons cela la représentation d'un lien.

1.1 Mouvements de Reidemeister

Mouvement 0 : 

Mouvement I :

Mouvement II :

et ? Mouvement III :  et et ?

Soit $\mathcal{L}_{\mathcal{P}} := {}^{\{\text{représentation d'un lien}\}}/_{\text{mouvement 0}}$
$\emptyset :=$ la représentation vide $\in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$

1.2 Isotopies

$\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$:

$K \sim L \overset{\triangle}{\iff}$ il existe une suite de mouvements 0, I, II et III qui transforme K en L (isotopie)

$K \simeq L \overset{\triangle}{\iff}$ il existe une suite de mouvements 0, II et III qui transforme K en L (isotopie régulière)

$\implies K \sim L$

$\sim$ et $\simeq$ sont des relations d'équivalences
(c.-à-d. réflexives, symétriques et transitives)

$\widetilde{K} := \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \mid L \sim K\} =$ un lien

$\widetilde{\widetilde{K}} := \{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \mid L \simeq K\} =$ un ruban $\subseteq \widetilde{K}$

$\widetilde{\widetilde{\emptyset}} = \widetilde{\emptyset} = \{\emptyset\}$
$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \setminus \{\emptyset\} : \widetilde{\widetilde{K}} \subset \widetilde{K}$

Ensemble des liens (links) : $\mathcal{L} := \{\widetilde{K} \,|\, K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}\}$

Ensemble des rubans (ribbons) : $\mathcal{R} := \{\widetilde{\widetilde{K}} \,|\, K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}\}$

2 Opérations

addition interne $+ : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \times \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \overset{\nearrow}{\longrightarrow} \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$
$(K, L) \longmapsto K + L :=$ le lien formé de K et L séparés

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall K, L, M \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ K + (L + M) = (K + L) + M & \text{(associatif)} \\ \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ K + \emptyset = K = \emptyset + K & \text{(neutre)} \\ \forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ K + L = L + K & \text{(commutatif)} \end{array}}$$

semi-groupe commutatif

multiplication externe $. : \mathbb{N} \times \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \overset{\nearrow}{\longrightarrow} \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$
$(n, K) \longmapsto n.K := \underbrace{K + \cdots + K}_{n}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : & 0.K = \emptyset \\ & 1.K = K \\ \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall m, n \in \mathbb{N} : & m.(n.K) = (mn).K \\ & (m + n).K = m.K + n.K \qquad \text{(distributif)} \\ \forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : & n.(K + L) = n.K + n.L \end{array}}$$

2.1 Nombre de cycles : $\|K\|$

$\|.\| : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \overset{\nearrow}{\longrightarrow} \mathbb{N}$
$K \longmapsto \|K\| :=$ nombre de cycles de K

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ \|K\| = 0 \iff K = \emptyset \\ \forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ \|K + L\| = \|K\| + \|L\| \\ \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : \ \|n.K\| = n.\|K\| \end{array}}$$

$$\boxed{\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ K \sim L \implies \|K\| = \|L\|}$$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ \|\widetilde{\widetilde{K}}\| := \|\widetilde{K}\| := \|K\|$

Ensemble des nœuds (knots) : $\mathcal{K} := \{\widetilde{K} \in \mathcal{L} \mid \|\widetilde{K}\| = 1\} \quad \subset \mathcal{L}$

$\mathcal{K}_{\mathcal{P}} := \{K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \mid \|K\| = 1\} \quad \subset \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$
Une représentation du nœud trivial : $\in \mathcal{K}_{\mathcal{P}}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ \|n.\,\text{ }\| = n}$$

Index

#, 14
., 2
~, 1
  ≃, 1
+, 2

[K], 5
<K>, 7
∅, 1
B_n, 11
ε(C), 4
  ε(c), 3
f_K, 8
J_2, 11
  J_∞, 11
$\mathcal{K}$, 2
  $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$, 2
K^*, 3
$\widetilde{K}$, 1
  $\widetilde{\widetilde{K}}$, 1
$|\,\widetilde{K}\,|$, 2
  $|\,\widetilde{\widetilde{K}}\,|$, 2
$\mathcal{L}$, 2
  $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$, 1
M(K), 3
  $M(\widetilde{K})$, 3
  $M(\widetilde{\widetilde{K}})$, 3
$M_A(\sigma)$, 13
  $M_B(\sigma)$, 13
$\mathcal{R}$, 2
σ, 13
TL_n, 11
$V_K(t)$, 8
w(K), 4
  $w(\widetilde{\widetilde{K}})$, 4

addition interne, 2

degré de torsion, 4

ensemble
  des liens, 2
  des nœuds, 2
  des représentations des liens, 1

isotopie, 1
  régulière, 1

lien, 1

mouvement
  0, 1
  I, 1
  II, 1
  III, 1
multiplication externe, 2

nœud
  miroir, 3
  produit, 14
  trivial, 2

polynôme
  de Jones, 8

représentation
  d'un lien, 1
  vide, 1
ruban, 1

Si $\varepsilon($ $) = 1$ alors $= A.$ $+ B.$

$\overset{?}{=} (Ad + B).$

$\overset{?}{=} (A + Bd^{-1}).$

Nœud produit (ou composé) : $K\#L$

$K\#$ $= K =$ $\#K$

$K\#L =$ $\implies K = L =$

2.2 Nombre (minimal) de croisements : $M(K)$

$M : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \overset{?}{\longrightarrow} \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

$K \longmapsto M(K) := \min_{L \in \widetilde{K}}$ (nombre de croisements de L)

$M(\emptyset) = 0$
$\forall K, L \in \mathcal{L} : \ M(K + L) = M(K) + M(L)$
$\forall K \in \mathcal{L}, \forall n \in \mathbb{N} : \ M(n.K) = n.M(K)$

$\forall n \in \mathbb{N} : \ M(n.$ $) = 0$

$\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} :$
$K \simeq L \implies$ (nb de croisements de K) $\equiv$ (nb de croisements de L) [2]

$\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ K \sim L \implies M(K) = M(L)$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ M(\widetilde{\widetilde{K}}) := M(\widetilde{K}) := M(K)$

2.3 Miroir : K^*

$.^* : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$

$K \longmapsto K^* :=$ K dont tout les croisements sont "inversés"

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} :$
$(K^*)^* = K$
$\|K^*\| = \|K\|$
$M(K^*) = M(K)$

$\emptyset^* = \emptyset$
$\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ (K + L)^* = K^* + L^*$
$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : \ (n.K)^* = n.K^*$

$\forall n \in \mathbb{N} : \ (n.$ $)^* = n.$

2.4 Degré de torsion : $w(K)$

$\forall$ croisement $c : \varepsilon(c) :=$

-1 si $c =$ ou

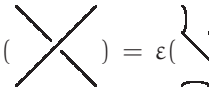
0 si $c =$ ou

1 si $c =$ ou

$\forall$ croisement c de $K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $\varepsilon(c) = 0 \implies \begin{vmatrix} \|K\| \geqslant 2 \\ M(K) \geqslant 2 \end{vmatrix}$

$\forall C$ morceau d'élements de $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $\varepsilon(C) := \sum_{\text{croisement } c \text{ de } C} \varepsilon(c)$

$\varepsilon(C^*) = -\varepsilon(C)$

$\varepsilon($  $) = \varepsilon($ $) = \varepsilon($ $)$

$\varepsilon($ $) = -\varepsilon($ $) = 1$

$\varepsilon($ $) = \varepsilon($ $) = \varepsilon($ $) = \varepsilon($ $) = 0$

$\varepsilon($ $) = \varepsilon($ $)$

$\varepsilon($ $) = 3\varepsilon($ $)$

Degré de torsion (writhe) : $\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $w(K) := \varepsilon(K) = \sum_{\text{croisement } c \text{ de } K} \varepsilon(c)$

$w(\emptyset) = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $w(n.$ $) = 0$

$\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $w(K + L) = w(K) + w(L)$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N}$: $w(n.K) = n.\,w(K)$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $w(K^*) = -w(K)$

$w($ $) - 1 = w($ $) = w($ $) + 1$

$w($ $) = w($ $) = w($ $)$

$w($ $) = w($ $)$

$\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $K \simeq L \implies w(K) = w(L)$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $w(\widetilde{K}) := w(K)$

Chutier

$-K = ?$ $\qquad [-K] = [K]^{-1}$ $\qquad \forall n \in \mathbb{Z} : \begin{vmatrix} [n.$ $] = d^n \\ [n.K] = [K]^n \end{vmatrix}$

$[$ $] + [$ $] = (A + B).[$ $][$ $ + [$ $])$

$[$ $] - [$ $] = (A - B).[$ $][$ $ - [$ $])$

$B.[$ $] - A.[$ $] = (B^2 - A^2).[$ $]$

$A.[$ $] - B.[$ $] = (A^2 - B^2).[$ $][$ $]$

$[$ $] = [$ $] \iff \begin{vmatrix} A = B \\ \text{ou} \\ [$ $][$ $] = [$ $] \end{vmatrix}$ (est-ce possible ?)

$[$ $].[$ $] = (A^2 + B^2).[$ $][$ $].[$ $] + AB.([$ $]^2 + [$ $]^2)$

$[$ $]^2 + [$ $]^2 = (A^2 + B^2).([$ $]^2 + [$ $]^2) + 4AB.[$ $][$ $].[$ $]$

$[$ $]^2 - [$ $]^2 = (A^2 - B^2).([$ $]^2 - [$ $]^2)$

$(A^2 - B^2)^2.[$ $][$ $].[$ $]$

$= (A^2 + B^2).[$ $].[$ $] - AB.([$ $]^2 + [$ $]^2)$

$< $ $ + $ $ > = < 2.$ $ > + < 2.$ $ > - < $ $ > . < $ $ >$

$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

σ = un état labellisé du lien K

$M_A(\sigma)$:= nombre de "croisements A gagnant" de σ
$M_B(\sigma)$:= nombre de "croisements B gagnant" de σ

$< K \mid \sigma >$:= produit des labels A et B pour l'état $\sigma = A^{M_A(\sigma)} B^{M_B(\sigma)}$
$< K > = \sum_{\text{état labellisé } \sigma} < K \mid \sigma > d^{\|\sigma\|-1}$
$< K > = \sum_{\text{état labellisé } \sigma} A^{M_A(\sigma) - M_B(\sigma)} (-A^2 - A^{-2})^{\|\sigma\|-1}$

$\deg(< K \mid \sigma >, AB) = M(K)$
$< KK' \mid \sigma\sigma' > = < K \mid \sigma > . < K' \mid \sigma' >$

Quand est-ce que $< K > = < L >$?

Références

[Cours 2005] BrunoMarchal,
Cours de logique et informatique théorique 2005 – . . . [2]
Forum CandiULB, 1er octobre 2005 – . . .

[Pour la Science] ***La science des nœuds***, Pour la Science [3] HS15, avril 1997.

[Jones] Vaughan Jones,
Flatland, un bel endroit pour faire de l'algèbre [4].
Les grandes conférences de l'École normale supérieure, 27 mars 2007.
À la recherche d'un nœud à polynôme trivial. 28 mars 2007.
Les sous-facteurs : une théorie de Galois enrichie. 29 mars 2007.

[Kauffman] Louis H. Kauffman [5]

[Dehornoy] Patrick Dehornoy [6]

2. http://www.candiulb.be/forum/index.php?showtopic=23145
3. http://www.pourlascience.com/
4. http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=1705
5. http://www2.math.uic.edu/~kauffman/
6. http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy/

3 Invariant de Kauffman

3.1 Fonction en ABd de Kauffman : [K]

$[.] : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$ tel que
$K \longmapsto [K]$

$\forall A, B, d \in \mathbb{C}$:
$[\emptyset] = 1$
$[K + \emptyset](A, B, d) = d.[K](A, B, d)$
$[\times](A, B, d) = A.[)(](A, B, d) + B.[⌣](A, B, d)$
$[\times](A, B, d) = A.[⌣](A, B, d) + B.[)(](A, B, d)$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ [n.\bigcirc](A, B, d) = d^n}$

$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : \ [K + n.\bigcirc](A, B, d) = d^n.[K](A, B, d)}$

$\boxed{\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ [K + L](A, B, d) = [K].[L](A, B, d)}$

Démonstration, par récurrence sur le nombre de croisements de L
Si L ne contient pas de croisement
alors $L = \|L\|.\bigcirc$ et $[K + L] = d^{\|L\|}.[K] = [K].[L]$

Si L contient au-moins un croisement
alors $[K + \times] = A.[K +)(] + B.[K + ⌣]$
$= A.[K].[)(] + B.[K].[⌣]$ (par hypothèse de récurrence)
$= [K].(A.[)(] + B.[⌣]) = [K].[\times]$

De même si L ne contient que des croisements □

$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : \ [n.K](A, B, d) = [K]^n(A, B, d)}$

$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ [K^*](A, B, d) = [K](B, A, d)}$

Démonstration, par récurrence sur le nombre de croisements de K
Si K ne contient pas de croisement alors $K^* = K = \|K\|.\bigcirc$
et $[K^*](A, B, d) = d^{\|K\|} = [K](B, A, d)$

Si K contient au-moins un croisement
alors $[\times^*](A, B, d) = A.[⌣^*](A, B, d) + B.[)(]^*(A, B, d)$
$= A.[⌣](B, A, d) + B.[)(](B, A, d)$ (par hypothèse de récurrence)
$= [\times](B, A, d)$

De même si K ne contient que des croisements □

$\boxed{[\ \times\ ] = [\ \text{⌣}\ ] = [\ \text{)(}\ ]}$

Démonstration

A.[ ] + B.[ ] = A.[ ] + B.[ ]

□

$[\,](A,B,d) = (Ad+B).[\,](A,B,d) = [\,](B,A,d)$

$[\,](A,B,d) = [\,](A,B,d) = [\,](A,B,d)$

$\iff \begin{vmatrix} B = 1-A \\ d = 1 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} B = A \neq 0 \\ d = A^{-1}-1 \end{vmatrix}$

$[\,](A,B,d) = (A^2+ABd+B^2).[\,](A,B,d) + AB.[\,](A,B,d)$
$= [\,](A,B,d)$

$[\,](A,B,d) = [\,](A,B,d) = [\,](A,B,d)$

$\Longleftarrow \begin{vmatrix} A^2+ABd+B^2 = 0 \\ AB = 1 \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} A \neq 0 \\ B = A^{-1} \\ d = -A^2-A^{-2} \end{vmatrix}$

$\Longrightarrow [\,](A,B,d) = [\,](A,B,d)$

Démonstration

[ ] = A.[ ] + B.[ ]

(si invariant pour mouvement II) = A.[ ] + B.[ ]

(si invariant pour mouvement II) = A.[ ] + B.[ ] = [ ]

□

$\begin{vmatrix} A \neq 0 \\ B = A^{-1} \\ d = -A^2-A^{-2} \\ [\,](A,B,d) = [\,](A,B,d) = [\,](A,B,d) \end{vmatrix}$

$\iff \begin{vmatrix} A = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2} \\ B = \frac{1\mp i\sqrt{3}}{2} \\ d = 1 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} B = A = -1 \\ d = -2 \end{vmatrix}$

Entiers d'Eisenstein ?
$\mathbb{Z} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\mathbb{Z}$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} :\ [K](-1,-1,-2) = (-2)^{\|K\|}$

Démonstration, par récurrence sur le nombre de croisements de $K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$
Si K ne contient pas de croisement
alors $K = \|K\|.$ et $[K](-1,-1,-2) = (-2)^{\|K\|}$

Algèbres

Soit K un corps

Algèbre de projecteurs de Jones :
J_2 avec $k \in K$: e_1, e_2
$e_1^2 = e_1$
$e_2^2 = e_2$
$e_1e_2e_1 = ke_1$
$e_2e_1e_2 = ke_2$

J_∞ avec $k \in K$: $e_1, e_2, e_3, \ldots$
$e_i^2 = e_i$
$e_ie_{i\pm1}e_i = ke_i$
$e_ie_j = e_je_i \quad$ si $|i-j| > 1$

Algèbre de Termperley-Lieb :
TL_n avec $\delta \in K$: $1, U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$
$U_i^2 = \delta U_i$
$U_iU_{i\pm1}U_i = U_i$
$U_iU_j = U_jU_i \quad$ si $|i-j| > 1$

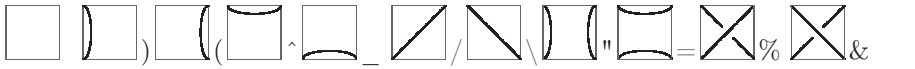
Groupe d'Artin :
B_n : $1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$
$(1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \sigma_3^{-1}, \ldots, \sigma_n^{-1})$
$\sigma_i\sigma_{i\pm1}\sigma_i = \sigma_{i\pm1}\sigma_i\sigma_{i\pm1}$
$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad$ si $|i-j| > 1$

Annexes

Pièces élémentaires des liens

Les éléments utilisés par le module `knots.py` du paquetage DSPython [1] :

knots :



empty left right top bottom up down vert hori crossup crossdown

labelstates :

crossupA crossupB crossdownA crossdownB

universes :

cross

Table des premiers nœuds premiers

0_1 :

$[0_1](A,B,d) = d$
$< 0_1 > = f_{0_1} = 1$
$w(0_1) = 0$

$M(K)_{\text{invariant gourmand(K)}}$

3_1 :

$[3_1](A,B,d) = B^3d^2 + 3AB^2d + 3A^2Bd^2 + A^3d^3$
$< 3_1 > (A) = -A^{-5} - A^3 + A^7$
$w(3_1) = -3$
$f_{3_1}(A) = A^4 + A^{12} - A^{16}$

$*?$ 4_1 :

$[4_1](A,B,d) = B^4d^3 + 4AB^3d^2 + 5A^2B^2d$
$+A^2B^2d^3 + 4A^3Bd^2 + A^4d^3$
$< 4_1 > (A) = f_{4_1}(A) = A^{-8} - A^{-4} + 1 - A^4 + A^8$
$w(4_1) = 0$

$*?$

5_1 :

5_2 :

$*?$ 6_1 :

6_2 :

6_3 :

$*?$

7_1 :

...

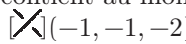
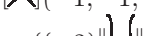
$*?$ 8_1 :

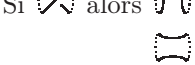
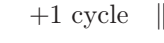
...

$*?$

...

1. http://www.opimedia.be/DS/DSPython/

Si K contient au moins un croisement
alors $(-1,-1,-2) = -($  $)(-1,-1,-2)$
$= -((-2)^{\|$  $\|} + (-2)^{\|$ $\|})$ (par hypothèse de récurrence)

• Si alors  +1 cycle $\|$$\| = \|$$\| + 1$
$\|$  $\| = \|$$\|$

donc $(-1,-1,-2) = -((-2)^{\|$$\|+1} + (-2)^{\|$$\|}) = -(-2)^{\|$$\|}(-2+1)$
$= (-2)^{\|$$\|}$

• Si alors $\|$$\| = \|$$\|$

+1 cycle $\|$$\| = \|$$\| + 1$

donc $(-1,-1,-2) = -((-2)^{\|$$\|} + (-2)^{\|$$\|+1}) = (-2)^{\|$$\|}$

• Si alors −1 cycle $\|$$\| = \|$$\| - 1$

−1 cycle $\|$$\| = \|$$\| - 1$

donc $(-1,-1,-2) = -((-2)^{\|$ $\|-1} + (-2)^{\|$$\|-1}) = (-2)^{\|$$\|}$ □

3.2 Fonction en A de Kauffman : < K >

$<.> : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C})$ tel que $\forall A \in \mathbb{C}_* : <K>(A) = \frac{[K](A,A^{-1},-A^2-A^{-2})}{-A^2-A^{-2}}$
$K \longmapsto < K >$

$< \emptyset > (A) = (-A^2 - A^{-2})^{-1}$

$< 0 >= 1$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : < K + 0 > (A) = (-A^2 - A^{-2}).< K > (A)$

$< $ $ > (A) = A.< $ $ > (A) + A^{-1}.< $ $ > (A)$
$< $ $ > (A) = A.< $$ > (A) + A^{-1}.< $$ > (A)$

relations fondamentales de Kauffman

$\forall n \in \mathbb{N} : < n.0 > (A) = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : < K + n.0 > (A) = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}.< K > (A)$

$\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : < K + L > (A) = (-A^2 - A^{-2}).< K > .< L > (A)$

$\forall K \in \mathcal{L}_\mathcal{P}, \forall n \in \mathbb{N} : < n.K > (A) = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}. < K >^n (A)$

$\forall K \in \mathcal{L}_\mathcal{P} : < K^* > (A) = < K > (A^{-1})$

$-A^{-3}. <$ $> (A) = <$ $> (A) = -A^3. <$ $> (A)$

$<$ $> = <$ $> = <$ $>$

$<$ $> = <$ $>$

$\forall K, L \in \mathcal{L}_\mathcal{P} : \ K \simeq L \implies < K > = < L >$

$\forall K \in \mathcal{L}_\mathcal{P} : < K > (-1) = (-2)^{\|K\|-1}$

3.3 Invariant de Kauffman : f_K

$f : \mathcal{L}_\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C})$ tel que $\forall A \in \mathbb{C}_* : \ f_K(A) = (-A^{-3})^{w(K)}. < K > (A)$
$K \longmapsto f_K$

$f_\emptyset(A) = (-A^2 - A^{-2})^{-1}$ $\qquad$ $f_{\text{ }} = 1$

$\forall K \in \mathcal{L}_\mathcal{P} : \ f_{K+\text{ }}(A) = (-A^2 - A^{-2}). < K > (A)$

$\forall K \in \mathcal{L}_\mathcal{P} : \ f_{K^*}(A) = f_K(A^{-1})$

$\forall K, L \in \mathcal{K}_\mathcal{P} : \ K \sim L \implies f_K = f_L$ $\quad f$ est un invariant de nœuds

Polynôme de Jones : $\forall K \in \mathcal{K}_\mathcal{P}, \forall t : \ V_K(t) = f_K(t^{-1/4})$

4 Divers

$\forall n \in \mathbb{N} : K =$ n fois $\implies$

$[K](A, B, d) = (Ad + B)^n d$
$< K > (A) = (-1)^n A^{3n}$
$w(K) = n$
$f_K = 1$

$\forall n \in \mathbb{N} : K =$ n fois $\implies$

$[K](A, B, d) = (A + Bd)^n d$
$< K > (A) = (-1)^n A^{-3n}$
$w(K) = -n$
$f_K = 1$

$\forall n \in \mathbb{N} : K =$ n fois $\implies$

$\|K\| = 2 - n\%2 = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
$[K](A, B, d) =$
$< K > (A) =$
$w(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
$f_K =$

$\forall n \in \mathbb{N} : K =$ n fois $\implies$

$\|K\| = 2 - n\%2 = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
$[K](A, B, d) =$
$< K > (A) =$
$w(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
$f_K =$

$\forall n \in 2\mathbb{N} :$

$K =$ n fois $\implies$

$K \stackrel{?}{=}$ le nœud premier $(n+2)_1$ si $n \geqslant 2$
$[K](A, B, d) =$
$< K > (A) =$
$w(K) = 2 - n$
$f_K(A) =$