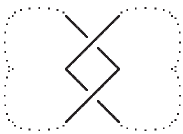
$\mathcal{L}$iens



Olivier Pirson
olivier_pirson_opi@yahoo.fr
http://www.opimedia.be/

mercredi 17 mars 2010

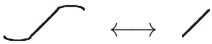
1 Représentation de liens et liens

Considérons le plan contenant un nombre fini de courbes fermées telles que :

- en chaque point du plan passe au plus 2 courbes (interdit )
- les points sur lesquels passent 2 courbes sont séparés (interdit )
- lorsque 2 courbes passent sur un même point elles s'entrecroisent et indique laquelle passe au-dessus, comme ceci :  ou  (interdit ).

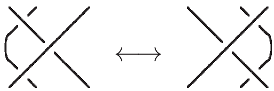
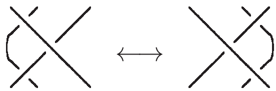
Appelons cela la représentation d'un lien.

1.1 Mouvements de Reidemeister

Mouvement 0 : 

Mouvement I : 

Mouvement II : 

et ? Mouvement III :  et  et ?

Soit $\mathcal{L}_{\mathcal{P}} := {}^{\{\text{représentation d'un lien}\}}/_{\text{mouvement } 0}$

$\emptyset :=$ la représentation vide $\quad \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$

1.2 Isotopies

$\forall \mathsf{K}, \mathsf{L} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$:

$\mathsf{K} \sim \mathsf{L} \overset{\triangle}{\iff}$ il existe une suite de mouvements 0, I, II et III qui transforme K en L (isotopie)

$\mathsf{K} \simeq \mathsf{L} \overset{\triangle}{\iff}$ il existe une suite de mouvements 0, II et III qui transforme K en L (isotopie régulière)

$\implies \mathsf{K} \sim \mathsf{L}$

$\sim$ et $\simeq$ sont des relations d'équivalences

(c.-à-d. réflexives, symétriques et transitives)

$\widetilde{\mathsf{K}} := \{\mathsf{L} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \mid \mathsf{L} \sim \mathsf{K}\} =$ un lien

$\overset{\simeq}{\mathsf{K}} := \{\mathsf{L} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \mid \mathsf{L} \simeq \mathsf{K}\} =$ un ruban $\quad \subseteq \widetilde{\mathsf{K}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \overset{\simeq}{\emptyset} = \widetilde{\emptyset} = \{\emptyset\} \\ \forall \mathsf{K} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \setminus \{\emptyset\} : \ \overset{\simeq}{\mathsf{K}} \subset \widetilde{\mathsf{K}} \end{array}}$$

Ensemble des liens (links) : $\mathcal{L} := \{\widetilde{K} \mid K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}\}$

Ensemble des rubans (ribbons) : $\mathcal{R} := \{\widetilde{\widetilde{K}} \mid K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}\}$

2 Opérations

$$\begin{array}{rcll} \text{addition interne } + : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \times \mathcal{L}_{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\mathcal{P}} & \\ (K, L) & \longmapsto & K + L := & \text{le lien formé de } K \text{ et } L \text{ séparés} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{lr} \forall K, L, M \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} :\ K + (L + M) = (K + L) + M & \text{(associatif)} \\ \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} :\ K + \emptyset = K = \emptyset + K & \text{(neutre)} \\ \forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} :\ K + L = L + K & \text{(commutatif)} \end{array}}$$

semi-groupe commutatif

$$\begin{array}{rcl} \text{multiplication externe } . : \mathbb{N} \times \mathcal{L}_{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \\ (n, K) & \longmapsto & n.K := \underbrace{K + \cdots + K}_{n} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \left| \begin{array}{l} 0.K = \emptyset \\ 1.K = K \end{array} \right. \\ \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall m, n \in \mathbb{N} : \left| \begin{array}{ll} m.(n.K) = (mn).K & \\ (m + n).K = m.K + n.K & \text{(distributif)} \end{array} \right. \\ \forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} :\ n.(K + L) = n.K + n.L \end{array}}$$

2.1 Nombre de cycles : $\|K\|$

$$\begin{array}{rcl} \|.\| : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ K & \longmapsto & \|K\| := \text{nombre de cycles de } K \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} :\ \|K\| = 0 \iff K = \emptyset \\ \forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} :\ \|K + L\| = \|K\| + \|L\| \\ \forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} :\ \|n.K\| = n.\|K\| \end{array}}$$

$$\boxed{\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} :\ K \sim L \implies \|K\| = \|L\|}$$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} :\ \|\widetilde{\widetilde{K}}\| := \|\widetilde{K}\| := \|K\|$

Ensemble des nœuds (knots) : $\mathcal{K} := \{\widetilde{K} \in \mathcal{L} \mid \|\widetilde{K}\| = 1\} \quad \subset \mathcal{L}$

$\mathcal{K}_{\mathcal{P}} := \{K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \mid \|K\| = 1\} \quad \subset \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$

Une représentation du nœud trivial : $\bigcirc \quad \in \mathcal{K}_{\mathcal{P}}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} :\ \|n.\bigcirc\| = n}$$

2.2 Nombre (minimal) de croisements : $\mathsf{M}(\mathsf{K})$

$$\begin{aligned} \color{red}{\mathsf{M}} : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} &\overset{?}{\twoheadrightarrow} \mathbb{N} \setminus \{1,2\} \\ \mathsf{K} &\longmapsto \mathsf{M}(\mathsf{K}) := \min_{\mathsf{L} \in \widetilde{\mathsf{K}}} (\text{nombre de croisements de } \mathsf{L}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathsf{M}(\emptyset) = 0 \\ \forall \mathsf{K}, \mathsf{L} \in \mathcal{L} : \ \mathsf{M}(\mathsf{K}+\mathsf{L}) = \mathsf{M}(\mathsf{K}) + \mathsf{M}(\mathsf{L}) \\ \forall \mathsf{K} \in \mathcal{L}, \forall n \in \mathbb{N} : \ \mathsf{M}(n.\mathsf{K}) = n.\,\mathsf{M}(\mathsf{K}) \end{array}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ \mathsf{M}(n.\mathrm{O}) = 0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \mathsf{K}, \mathsf{L} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \\ \quad \mathsf{K} \simeq \mathsf{L} \implies (\text{nb de croisements de } \mathsf{K}) \equiv (\text{nb de croisements de } \mathsf{L}) \ [2] \end{array}}$$

$$\boxed{\forall \mathsf{K}, \mathsf{L} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ \mathsf{K} \sim \mathsf{L} \implies \mathsf{M}(\mathsf{K}) = \mathsf{M}(\mathsf{L})}$$

$$\forall \mathsf{K} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ \color{red}{\mathsf{M}(\widetilde{\widetilde{\mathsf{K}}})} := \color{red}{\mathsf{M}(\widetilde{\mathsf{K}})} := \mathsf{M}(\mathsf{K})$$

2.3 Miroir : K^*

$$\begin{aligned} \color{red}{.^*} : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} &\twoheadrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \\ \mathsf{K} &\longmapsto \mathsf{K}^* := \mathsf{K} \text{ dont tout les croisements sont “inversés”} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall \mathsf{K} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \left| \begin{array}{l} (\mathsf{K}^*)^* = \mathsf{K} \\ \|\mathsf{K}^*\| = \|\mathsf{K}\| \\ \mathsf{M}(\mathsf{K}^*) = \mathsf{M}(\mathsf{K}) \end{array} \right.}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \emptyset^* = \emptyset \\ \forall \mathsf{K}, \mathsf{L} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ (\mathsf{K}+\mathsf{L})^* = \mathsf{K}^* + \mathsf{L}^* \\ \forall \mathsf{K} \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : \ (n.\mathsf{K})^* = n.\mathsf{K}^* \end{array}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ (n.\mathrm{O})^* = n.\mathrm{O}}$$

2.4 Degré de torsion : $\mathrm{w}(\mathsf{K})$

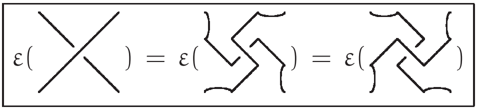
$\forall$ croisement c : $\color{red}{\varepsilon(\mathsf{c})} :=$

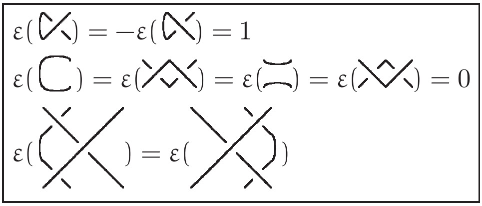
- -1 si $\mathsf{c} =$  ou 
- 0 si $\mathsf{c} =$  ou 
- 1 si $\mathsf{c} =$  ou 

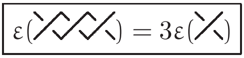
$$\boxed{\forall \text{ croisement } c \text{ de } K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ \varepsilon(c) = 0 \implies \left| \begin{array}{l} \|K\| \geqslant 2 \\ M(K) \geqslant 2 \end{array} \right.}$$

$\forall C$ morceau d'élements de $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $\varepsilon(C) := \sum\limits_{\text{croisement } c \text{ de } C} \varepsilon(c)$

$$\boxed{\varepsilon(C^*) = -\varepsilon(C)}$$







Degré de torsion (writhe) : $\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $w(K) := \varepsilon(K) = \sum\limits_{\text{croisement } c \text{ de } K} \varepsilon(c)$

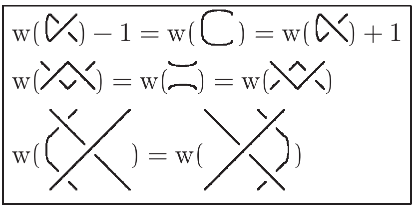
$$\boxed{w(\emptyset) = 0}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ w(n.\bigcirc) = 0}$$

$$\boxed{\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ w(K + L) = w(K) + w(L)}$$

$$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : \ w(n.K) = n.\, w(K)}$$

$$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ w(K^*) = -\, w(K)}$$



$$\boxed{\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ K \simeq L \implies w(K) = w(L)}$$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$: $w(\overset{\simeq}{K}) := w(K)$

3 Invariant de Kauffman

3.1 Fonction en ABd de Kauffman : [K]

$[.] : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$ tel que $\forall A, B, d \in \mathbb{C}$:
$\mathsf{K} \longmapsto [\mathsf{K}]$

$[\emptyset] = 1$

$[K + \emptyset](A, B, d) = d.[K](A, B, d)$

$[\;](A, B, d) = A.[\;](A, B, d) + B.[\;](A, B, d)$

$[\;](A, B, d) = A.[\;](A, B, d) + B.[\;](A, B, d)$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ [n.\,](A, B, d) = d^n}$$

$$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : \ [K + n.\,](A, B, d) = d^n.[K](A, B, d)}$$

$$\boxed{\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ [K + L](A, B, d) = [K].[L]\,(A, B, d)}$$

Démonstration, par récurrence sur le nombre de croisements de L
Si L ne contient pas de croisement
alors $L = \|L\|.\,$ et $[K + L] = d^{\|L\|}.[K] = [K].[L]$

Si L contient au-moins un croisement
alors $[K + \;] = A.[K + \;] + B.[K + \;]$
$= A.[K].[\;] + B.[K].[\;]$ (par hypothèse de récurrence)
$= [K].(A.[\;] + B.[\;]) = [K].[\;]$

De même si L ne contient que des croisements □

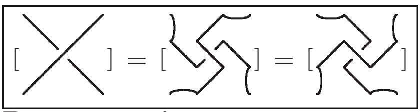
$$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : \ [n.K](A, B, d) = [K]^n(A, B, d)}$$

$$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ [K^*](A, B, d) = [K](B, A, d)}$$

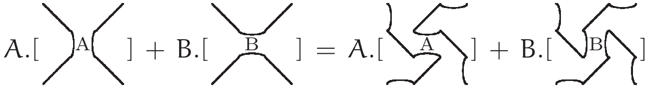
Démonstration, par récurrence sur le nombre de croisements de K
Si K ne contient pas de croisement alors $K^* = K = \|K\|.\,$
et $[K^*](A, B, d) = d^{\|K\|} = [K](B, A, d)$

Si K contient au-moins un croisement
alors $[\;^*](A, B, d) = A.[\;^*](A, B, d) + B.[\;^*](A, B, d)$
$= A.[\;](B, A, d) + B.[\;](B, A, d)$ (par hypothèse de récurrence)
$= [\;](B, A, d)$

De même si K ne contient que des croisements □



Démonstration



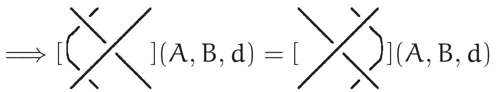
□

$[\ ](A,B,d) = (Ad+B).[\ ](A,B,d) = [\ ](B,A,d)$

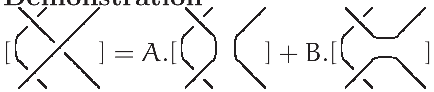
$[\ ](A,B,d) = [\ ](A,B,d) = [\ ](A,B,d)$
$\iff \left| \begin{array}{l} B = 1-A \\ d = 1 \end{array} \right.$ ou $\left| \begin{array}{l} B = A \neq 0 \\ d = A^{-1} - 1 \end{array} \right.$

$[\ ](A,B,d) = (A^2 + ABd + B^2).[\ ](A,B,d) + AB.[\ ](A,B,d)$
$= [\ ](A,B,d)$

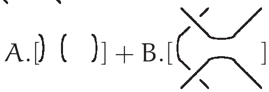
$[\ ](A,B,d) = [\ ](A,B,d) = [\ ](A,B,d)$
$\Longleftarrow \left| \begin{array}{l} A^2 + ABd + B^2 = 0 \\ AB = 1 \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{l} A \neq 0 \\ B = A^{-1} \\ d = -A^2 - A^{-2} \end{array} \right.$



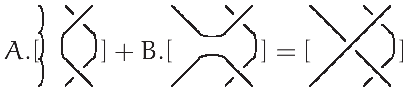
Démonstration



(si invariant pour mouvement II) $=$



(si invariant pour mouvement II) $=$



□

$\left| \begin{array}{l} A \neq 0 \\ B = A^{-1} \\ d = -A^2 - A^{-2} \\ [\ ](A,B,d) = [\ ](A,B,d) = [\ ](A,B,d) \end{array} \right.$
$\iff \left| \begin{array}{l} A = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ B = \frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2} \\ d = 1 \end{array} \right.$ ou $\left| \begin{array}{l} B = A = -1 \\ d = -2 \end{array} \right.$

Entiers d'Eisenstein ?
$\mathbb{Z} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\mathbb{Z}$

$\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} :\ [K](-1,-1,-2) = (-2)^{\|K\|}$

Démonstration, par récurrence sur le nombre de croisements de $K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$
Si K ne contient pas de croisement
alors $K = \|K\|.\bigcirc$ et $[K](-1,-1,-2) = (-2)^{\|K\|}$

Si K contient au moins un croisement

alors $[\ ](-1,-1,-2) = [\ ](-1,-1,-2) = -([\ ] + [\ ])(-1,-1,-2)$

$= -((-2)^{\|\ \|} + (-2)^{\|\ \|})$ (par hypothèse de récurrence)

• Si alors +1 cycle $\|\ \| = \|\ \| + 1$

$\|\ \| = \|\ \|$

donc $[\ ](-1,-1,-2) = -((-2)^{\|\ \|+1} + (-2)^{\|\ \|}) = -(-2)^{\|\ \|}(-2+1)$

$= (-2)^{\|\ \|}$

• Si alors $\|\ \| = \|\ \|$

+1 cycle $\|\ \| = \|\ \| + 1$

donc $[\ ](-1,-1,-2) = -((-2)^{\|\ \|} + (-2)^{\|\ \|+1}) = (-2)^{\|\ \|}$

• Si alors −1 cycle $\|\ \| = \|\ \| - 1$

−1 cycle $\|\ \| = \|\ \| - 1$

donc $[\ ](-1,-1,-2) = -((-2)^{\|\ \|-1} + (-2)^{\|\ \|-1}) = (-2)^{\|\ \|}$ $\square$

3.2 Fonction en A de Kauffman : $< K >$

$$<.> : \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C}) \quad \text{tel que } \forall A \in \mathbb{C}_* : <K>(A) = \frac{[K](A, A^{-1}, -A^2 - A^{-2})}{-A^2 - A^{-2}}$$
$$K \longmapsto <K>$$

$$\boxed{<\emptyset>(A) = (-A^2 - A^{-2})^{-1}} \qquad \boxed{< \bigcirc > = 1}$$

$$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : < K + \bigcirc > (A) = (-A^2 - A^{-2}).<K>(A)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} <\ >(A) &= A.<\ >(A) + A^{-1}.<\ >(A) \\ <\ >(A) &= A.<\ >(A) + A^{-1}.<\ >(A) \end{aligned}}$$

relations fondamentales de Kauffman

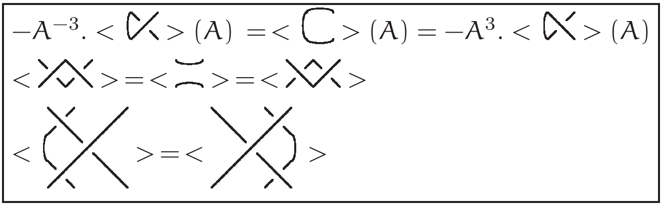
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : < n.\bigcirc > (A) = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}}$$

$$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : < K + n.\bigcirc > (A) = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}.<K>(A)}$$

$$\boxed{\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : < K + L > (A) = (-A^2 - A^{-2}).<K>.<L>(A)}$$

$$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}, \forall n \in \mathbb{N} : < n.K > (A) = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}. < K >^n (A)}$$

$$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : < K^* > (A) = < K > (A^{-1})}$$



$$\boxed{\forall K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ K \simeq L \implies < K > = < L >}$$

$$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : < K > (-1) = (-2)^{\|K\|-1}}$$

3.3 Invariant de Kauffman : f_K

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C}) \\ K & \longmapsto & f_K \end{array} \quad \text{tel que } \forall A \in \mathbb{C}_* : \ f_K(A) = (-A^{-3})^{w(K)}. <K> (A)$$

$$\boxed{f_{\emptyset}(A) = (-A^2 - A^{-2})^{-1}} \qquad \boxed{f_{\bigcirc} = 1}$$

$$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ f_{K + \bigcirc} (A) = (-A^2 - A^{-2}). < K > (A)}$$

$$\boxed{\forall K \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} : \ f_{K^*}(A) = f_K(A^{-1})}$$

$\boxed{\forall K, L \in \mathcal{K}_{\mathcal{P}} : \ K \sim L \implies f_K = f_L}$ f est un invariant de nœuds

Polynôme de Jones : $\boxed{\forall K \in \mathcal{K}_{\mathcal{P}}, \forall t : \ V_K(t) = f_K(t^{-1/4})}$

4 Divers

$\forall n \in \mathbb{N} : K =$  $\implies$
$[K](A, B, d) = (Ad + B)^n d$
$<K> (A) = (-1)^n A^{3n}$
$w(K) = n$
$f_K = 1$

$\forall n \in \mathbb{N} : K =$  $\implies$
$[K](A, B, d) = (A + Bd)^n d$
$<K> (A) = (-1)^n A^{-3n}$
$w(K) = -n$
$f_K = 1$

$\forall n \in \mathbb{N} : \mathsf{K} =$  $\Longrightarrow$

n fois

$$\|\mathsf{K}\| = 2 - n\%2 = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$[\mathsf{K}](A, B, d) =$

$<\mathsf{K}> (A) =$

$$w(\mathsf{K}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$f_{\mathsf{K}} =$

$\forall n \in \mathbb{N} : \mathsf{K} =$  $\Longrightarrow$

n fois

$$\|\mathsf{K}\| = 2 - n\%2 = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

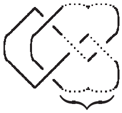
$[\mathsf{K}](A, B, d) =$

$<\mathsf{K}> (A) =$

$$w(\mathsf{K}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$f_{\mathsf{K}} =$

$\forall n \in 2\mathbb{N} :$

$\mathsf{K} =$  $\Longrightarrow$

n fois

$\mathsf{K} \stackrel{?}{=}$ le nœud premier $(n+2)_1$ si $n \geqslant 2$

$[\mathsf{K}](A, B, d) =$

$<\mathsf{K}> (A) =$

$w(\mathsf{K}) = 2 - n$

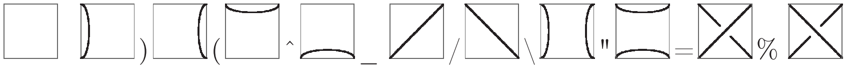
$f_{\mathsf{K}}(A) =$

Annexes

Pièces élémentaires des liens

Les éléments utilisés par le module `knots.py` du paquetage DSPython[1] :

knots :



) (^ _ / \ " = % &

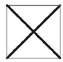
empty left right top bottom up down vert hori crossup crossdown

labelstates :

A B a b

crossupA crossupB crossdownA crossdownB

universes :



x

cross

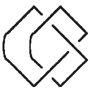
Table des premiers nœuds premiers

0_1 : 

$[0_1](A, B, d) = d$ $\qquad M(K)_{\text{invariant gourmand}(K)}$

$< 0_1 > = f_{0_1} = 1$

$w(0_1) = 0$

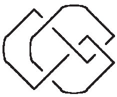
3_1 : 

$[3_1](A, B, d) = B^3d^2 + 3AB^2d + 3A^2Bd^2 + A^3d^3$

$< 3_1 > (A) = -A^{-5} - A^3 + A^7$

$w(3_1) = -3$

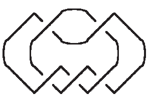
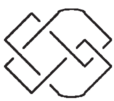
$f_{3_1}(A) = A^4 + A^{12} - A^{16}$

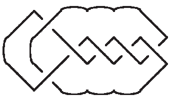
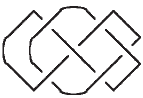
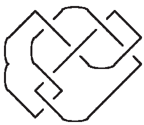
$*?$ 4_1 : 

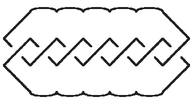
$$[4_1](A, B, d) = B^4d^3 + 4AB^3d^2 + 5A^2B^2d + A^2B^2d^3 + 4A^3Bd^2 + A^4d^3$$

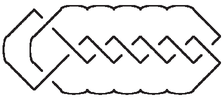
$< 4_1 > (A) = f_{4_1}(A) = A^{-8} - A^{-4} + 1 - A^4 + A^8$ $\qquad *?$

$w(4_1) = 0$

5_1 :  $\qquad 5_2$: 

$*?$ 6_1 :  $\qquad 6_2$:  $\qquad 6_3$:  $\qquad *?$

7_1 :  $\qquad \ldots$

$*?$ 8_1 :  $\qquad \ldots$ $\qquad *?$

…

1. http://www.opimedia.be/DS/DSPython/

Algèbres

Soit K un corps

Algèbre de projecteurs de Jones :

J_2 avec $k \in K$: e_1, e_2

$$\begin{aligned}
e_1^2 &= e_1 \\
e_2^2 &= e_2 \\
e_1 e_2 e_1 &= k e_1 \\
e_2 e_1 e_2 &= k e_2
\end{aligned}$$

J_∞ avec $k \in K$: $e_1, e_2, e_3, \ldots$

$$\begin{aligned}
e_i^2 &= e_i \\
e_i e_{i\pm 1} e_i &= k e_i \\
e_i e_j &= e_j e_i \quad \text{si } |i-j| > 1
\end{aligned}$$

Algèbre de Termperley-Lieb :

TL_n avec $\delta \in K$: $1, U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$

$$\begin{aligned}
U_i^2 &= \delta U_i \\
U_i U_{i\pm 1} U_i &= U_i \\
U_i U_j &= U_j U_i \quad \text{si } |i-j| > 1
\end{aligned}$$

Groupe d'Artin :

B_n : $1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$

$$\begin{aligned}
&(1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \sigma_3^{-1}, \ldots, \sigma_n^{-1}) \\
&\sigma_i \sigma_{i\pm 1} \sigma_i = \sigma_{i\pm 1} \sigma_i \sigma_{i\pm 1} \\
&\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i-j| > 1
\end{aligned}$$

Références

[Cours 2005] BrunoMarchal,
Cours de logique et informatique théorique 2005 – . . . [2]
Forum CandiULB, 1er octobre 2005 – . . .

[Pour la Science] ***La science des nœuds***, Pour la Science [3] HS15, avril 1997.

[Jones] Vaughan Jones,
Flatland, un bel endroit pour faire de l'algèbre [4].
Les grandes conférences de l'École normale supérieure, 27 mars 2007.
À la recherche d'un nœud à polynôme trivial. 28 mars 2007.
Les sous-facteurs : une théorie de Galois enrichie. 29 mars 2007.

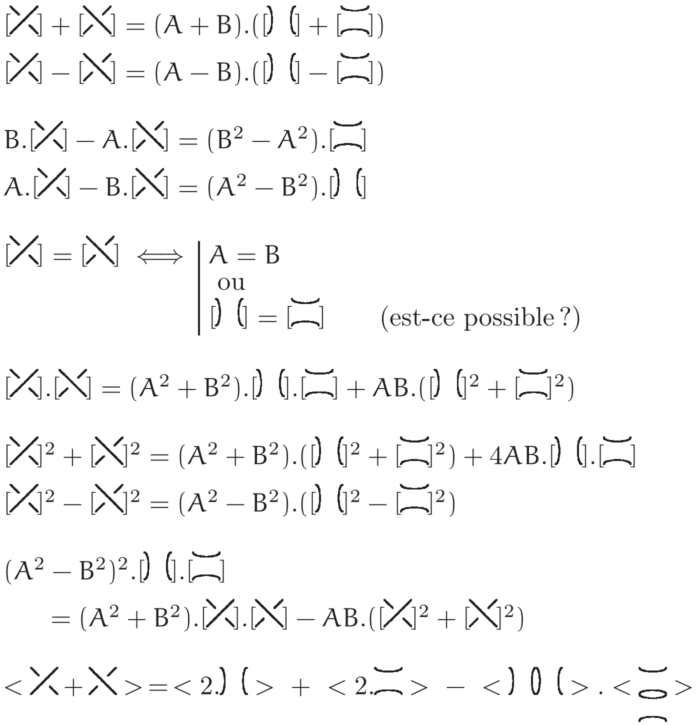
[Kauffman] Louis H. Kauffman [5]

[Dehornoy] Patrick Dehornoy [6]

2. http://www.candiulb.be/forum/index.php?showtopic=23145
3. http://www.pourlascience.com/
4. http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=1705
5. http://www2.math.uic.edu/~kauffman/
6. http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy/

Chutier

$-K = ?$ $\qquad [-K] = [K]^{-1}$ $\qquad \forall n \in \mathbb{Z} : \left| \begin{array}{l} [n.\bigcirc] = d^n \\ [n.K] = [K]^n \end{array} \right.$



$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

σ = un état labellisé du lien K

$M_A(\sigma)$:= nombre de "croisements A gagnant" de σ
$M_B(\sigma)$:= nombre de "croisements B gagnant" de σ

$< K \,|\, \sigma >$:= produit des labels A et B pour l'état $\sigma = A^{M_A(\sigma)} B^{M_B(\sigma)}$

$$< K > = \sum_{\text{état labellisé } \sigma} < K \,|\, \sigma > d^{\|\sigma\|-1}$$

$$< K > = \sum_{\text{état labellisé } \sigma} A^{M_A(\sigma) - M_B(\sigma)} (-A^2 - A^{-2})^{\|\sigma\|-1}$$

$\deg(< K \,|\, \sigma >, AB) = M(K)$
$< KK' \,|\, \sigma\sigma' > = < K \,|\, \sigma > . < K' \,|\, \sigma' >$

Quand est-ce que $< K > = < L >$?

Si $\varepsilon($$) = 1$ alors $[$$] = A.[$$] + B.[$$]$

$\stackrel{?}{=} (Ad + B).[$$]$

$\stackrel{?}{=} (A + Bd^{-1}).[$$]$

Nœud produit (ou composé) : $K \# L$

$K \#$  $= K =$  $\# K$

$K \# L =$  $\implies K = L =$ 

Index

Table des matières

OTEXtes

mis en page sous DSTEX
le 8 janvier 2012
http://www.opimedia.be/DS/